En primer lugar expresamos los valores de la longitud, el diámetro de la barra y la densidad del cobre en unidades del sistema internacional:

$L=30$ cm $=0.3$ m; $d=2$ mm$=2\ 10^{-3}$ m; $\rho_{cobre}=8.96$ g/cm^3$=8.96\ 10^{-3}$ kg/$(10^{-2})^3$m^3$=8960$ kg/m^3

a)

La carga F que puede soportar la barra sin sobrepasar el límite elástico es:

$$F \leq \sigma_{\text{límite elástico}} \cdot S$$

Donde S es el área de la sección transversal de la barra, la máxima carga es por lo tanto:

$$F_{máx} = \sigma_{\text{límite elástico}} \cdot S = 15\ 10^7\ \pi\ (10^{-3})^2 = 471.24\ \text{N}$$

$$\underline{F_{máx} = 471.24\ \text{N}}$$

b)

La variación de volumen que experimenta la barra cuando actúa sobre ella una carga es:

$$\Delta V = V_{final} - V_{inicial}$$

Al someter la barra a un esfuerzo longitudinal de tracción dentro del rango elástico su longitud aumenta Δl y su radio disminuye Δr la relación entre ambas deformaciones es el coeficiente de Poisson:

$$\mu = -\frac{\frac{\Delta d}{d}}{\frac{\Delta l}{l}} = -\frac{\frac{\Delta r}{r}}{\frac{\Delta l}{l}}$$

De esta relación obtenemos:

$$\Delta r = -\frac{\mu r \Delta l}{l}$$

$$V_{final} = \pi (r+\Delta r)^2 (l+\Delta l)$$

$$\Delta V = V_{final} - V_{inicial} == \pi (r+\Delta r)^2 (l+\Delta l) - \pi r^2 l$$

Despreciando los infinitésimos de orden 2 y superiores nos queda:

$$\Delta V = 2\pi r l \Delta r + \pi r^2 \Delta l = -2\pi r^2 \mu \Delta l + \pi r^2 \Delta l = \pi r^2 \Delta l (1-2\mu)$$

La variación de longitud la calculamos a partir del módulo de Young:

$$E = \frac{\sigma}{\frac{\Delta l}{l}} \quad \Rightarrow \quad \Delta l = \frac{\sigma l}{E} = \frac{15 \cdot 10^7 \cdot 0.30}{12.8 \cdot 10^{10}} = 3.51 \cdot 10^{-4}\ \text{m}$$

$$\Delta V = \pi\ (10^{-3})^2\ 3.51\ 10^{-4} (1-0.76)\ \text{m}^3 = 2.65\ 10^{-10}\ \text{m}^3$$

$$\underline{\Delta V = 2.65\ 10^{-10}\ \text{m}^3}$$

c)

La energía potencial elástica almacenada es:

$$E_p = (1/2)\ F\ \Delta l = 0.5 \cdot 471.24 \cdot 3.51 \cdot 10^{-4}\ \text{J} = 0.0827\ \text{J}$$

$$E_P = 0.0827\ \text{J}$$

d)

Para que se formen ondas estacionarias en la barra, teniendo en cuenta que en los extremos hay nodos, la longitud de la barra tiene que ser un número entero de semi-longitudes de onda:

$$l = n\frac{\lambda}{2}$$

$$l = n\frac{v}{2\nu} \quad \Rightarrow \quad \nu = n\frac{v}{2l}$$

La mínima frecuencia para que se formen ondas estacionarias en la barra es la correspondiente al valor de n=1:

$$\nu_{mín} = \frac{v}{2l}$$

Como son ondas longitudinales su velocidad de propagación es:

$$v = \sqrt{\frac{E}{\rho}} = \sqrt{\frac{12.8 \cdot 10^{10}}{8960}} = 3779.6 \text{ m/s}$$

$$\nu_{mín} = \frac{v}{2l} = \frac{3779.6}{0.60} = 6299.4 \text{ Hz}$$

donde se ha despreciado el incremento de longitud (Δl=0.0003 m) y se ha tomado para valor de l su longitud inicial de 0.3 m:

$\underline{\nu_{mín}=6299.4 \text{ Hz}}$

e)

La frecuencia de emisión del silbato del tren es $\nu_e = \frac{\nu_{mín}}{10} = 629.94 \text{ Hz}$

Como la frecuencia que percibe el observador en reposo es superior a la frecuencia de emisión la fuente de sonido se acerca, es decir el tren se acerca.

Aplicando la ecuación del efecto Doppler tenemos:

$$\nu_P = \nu_e \frac{v_s}{v_s - v_F}$$

donde ν_P es la frecuencia que percibe el observador, ν_e es la frecuencia de emisión de la fuente, v_s es la velocidad del sonido en el medio, en este caso en el aire, y v_F la velocidad de la fuente que emite el sonido, en este caso la velocidad del tren:

$$v_F = v_s - v_s \frac{\nu_e}{\nu_p} = 340 - 340 \frac{629.94}{669.3} = 19.99 \text{ m/s}$$

$\underline{v_{tren}=20 \text{ m/s}}$