

a) En primer lugar vamos a determinar las constantes caloríficas del gas. Por tratarse de un gas diatómico:

$$c_V = \frac{5}{2}R = \frac{5}{2} \cdot 2 = 5 \text{ cal/molK}$$

Y además:

$$c_P - c_V = R \Rightarrow c_P = c_V + R = 5 + 2 = 7 \text{ cal/molK}$$

Por tanto la constante adiabática del gas es:

$$\gamma = \frac{c_P}{c_V} = \frac{7}{5} = 1.4$$

Y el número de moles de oxígeno es:

$$n = \frac{m}{M} = \frac{500}{32} = 15.625 \text{ moles}$$

Empezamos por el primer estado, el inicial, en el cual conocemos la presión y la temperatura:

$$\underline{P_1 = 1 \text{ atm}}$$

$$T_1 = 50^\circ\text{C} = 323\text{K}$$

$$\underline{T_1 = 323\text{K}}$$

Mediante la ecuación de los gases perfectos podemos determinar el volumen:

$$P_1 V_1 = nRT_1 \Rightarrow V_1 = \frac{nRT_1}{P_1} = \frac{15.625 \cdot 0.082 \cdot 323}{1} = 413.84 \text{ l}$$

$$\underline{V_1 = 413.84 \text{ l}}$$

Desde el estado 1 al estado 2 se pasa por una transformación isobara, reduciéndose el volumen a la mitad, de modo que:

$$P_2 = P_1 = 1 \text{ atm}$$

$$\underline{P_2 = 1 \text{ atm}}$$

$$V_2 = \frac{V_1}{2} = \frac{413.84}{2} = 206.92 \text{ l}$$

$$\underline{V_2 = 206.92 \text{ l}}$$

Y teniendo en cuenta que la transformación 1→2 es a presión constante:

$$\frac{nR}{P} = \text{cte} = \frac{V}{T} \Rightarrow \frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2} \Rightarrow \frac{413.84}{323} = \frac{206.92}{T_2} \Rightarrow T_2 = 161.50\text{K}$$

$$\underline{T_2 = 161.50 \text{ K}}$$

También podríamos haber aplicado la ecuación de los gases perfectos:

$$P_2 V_2 = nRT_2 \Rightarrow T_2 = \frac{P_2 V_2}{nR} = \frac{1 \cdot 206.92}{15.625 \cdot 0.082} = 161.50 \text{ K}$$

Vemos que obtenemos exactamente el mismo resultado.

La etapa 2→3 es una compresión adiabática. En dicho proceso:

$$\Delta Q_{23}=0$$

Aplicando el primer principio:

$$\Delta U_{23}=\Delta Q_{23}-\Delta W_{23} \Rightarrow \Delta U_{23}=-\Delta W_{23}$$

La variación de energía interna es:

$$\Delta U_{23}=nc_v(T_3-T_2)$$

Si el gas se comprime, su temperatura aumenta, de modo que la variación de energía interna será positiva (el trabajo es negativo). Como la variación de energía interna es igual a la variación de trabajo cambiada de signo:

$$\Delta U_{23}=10283 \text{ J}=2460.05 \text{ cal} \Rightarrow \Delta U_{23}=nc_v(T_3-T_2) \Rightarrow 2460.05=15.625 \cdot 5 \cdot (T_3-161.50)$$

$$\underline{T_3=192.99\text{K}}$$

Además, como la transformación 2→3 es adiabática:

$$TV^{\gamma-1} = \text{cte} \Rightarrow T_2V_2^{\gamma-1} = T_3V_3^{\gamma-1} \Rightarrow 161.50 \cdot 206.92^{1.4-1} = 192.99V_3^{1.4-1} \Rightarrow V_3 = 132.56 \text{ l}$$

$$\underline{V_3=132.56 \text{ l}}$$

En una transformación adiabática también se verifica que:

$$PV^{\gamma} = \text{cte} \Rightarrow P_2V_2^{\gamma} = P_3V_3^{\gamma} \Rightarrow 1 \cdot 206.92^{1.4} = P_3 \cdot 132.56^{1.4} \Rightarrow P_3 = 1.865 \text{ atm}$$

$$\underline{P_3=1.865 \text{ atm}}$$

Obviamente, este parámetro también podríamos haberlo determinado a través de la ecuación de los gases perfectos:

$$P_3V_3 = nRT_3 \Rightarrow P_3 = \frac{nRT_3}{V_3} = \frac{15.625 \cdot 0.082 \cdot 192.99}{132.56} = 1.865 \text{ atm}$$

A continuación pasamos al estado 4 a través de una transformación a volumen constante:

$$V_4=V_3=132.56 \text{ l}$$

$$\underline{V_4=132.56 \text{ l}}$$

La transformación que cierra el ciclo, 4→1, es una isoterma, luego:

$$T_4=T_1=323\text{K}$$

$$\underline{T_4=323\text{K}}$$

Y podemos determinar la presión en el estado 4 a través de los gases perfectos:

$$P_4V_4 = nRT_4 \Rightarrow P_4 = \frac{nRT_4}{V_4} = \frac{15.625 \cdot 0.082 \cdot 323}{132.56} = 3.123 \text{ atm}$$

$$\underline{P_4=3.123 \text{ atm}}$$

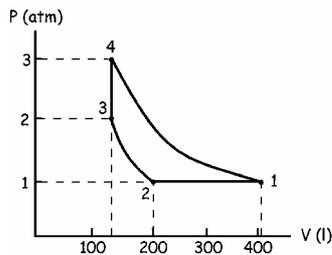
Esta presión también la podemos calcular teniendo en cuenta que la transformación 3→4 es a volumen constante, luego:

$$\frac{nR}{V} = cte = \frac{P}{T} \Rightarrow \frac{P_3}{T_3} = \frac{P_4}{T_4} \Rightarrow \frac{1.865}{192.99} = \frac{P_4}{323} \Rightarrow P_4 = 3.121 \text{ atm}$$

También podríamos haber tenido en cuenta que la transformación 4→1 es isoterma:

$$nRT = cte = PV \Rightarrow P_4 V_4 = P_1 V_1 \Rightarrow P_4 \cdot 132.56 = 1 \cdot 413.84 \Rightarrow P_4 = 3.122 \text{ atm}$$

Vemos que mediante los tres caminos obtenemos prácticamente el mismo resultado.



b) Ahora dibujamos el ciclo. Ponemos los cuatro puntos en un diagrama PV. La transformación 1→2 es isobara (P=cte) luego vendrá representada por una horizontal. La transformación 2→3 es adiabática luego tendremos una curva. La transformación 3→4 es isocora (V=cte), por tanto tendremos una vertical. Por último, la transformación 4→1 es isoterma, luego la representamos por una curva. Así, tendremos el ciclo que aparece en la figura.

c) Resolveremos cada transformación por separado, ya que después, para todo el ciclo, no hay más que sumar los parámetros correspondientes. La transformación 1→2 es isobara, luego tendremos:

$$\Delta U_{12} = n c_v (T_2 - T_1) = 15.625 \cdot 5 \cdot (161.50 - 323) = -12627 \text{ cal} = -52739.84 \text{ J}$$

$$\underline{\Delta U_{12} = -52739.84 \text{ J}}$$

$$\Delta W_{12} = P_1 (V_2 - V_1) = 1 \cdot (206.92 - 413.84) = -206.92 \text{ atm} \cdot \text{l} = -20966.11 \text{ J}$$

$$\underline{\Delta W_{12} = -20966.11 \text{ J}}$$

$$\Delta Q_{12} = \Delta U_{12} + \Delta W_{12} = -20966.11 - 52739.84 = -73705.95 \text{ J}$$

$$\underline{\Delta Q_{12} = -73705.95 \text{ J}}$$

$$\begin{aligned} \Delta S_{12} &= \int \frac{dQ_{12}}{T} = \int \frac{dU_{12}}{T} + \int \frac{dW_{12}}{T} = \int_{T_1}^{T_2} \frac{n c_v dT}{T} + \int \frac{P dV}{T} = \int_{T_1}^{T_2} \frac{n c_v dT}{T} + \int_{T_1}^{T_2} \frac{n R dT}{T} = \int_{T_1}^{T_2} \frac{n (c_v + R) dT}{T} = \\ &= \int_{T_1}^{T_2} \frac{n c_p dT}{T} = n c_p \ln T \Big|_{T_1}^{T_2} = n c_p (\ln T_2 - \ln T_1) = n c_p \ln \frac{T_2}{T_1} = 15.625 \cdot 7 \cdot \ln \frac{161.50}{323} = \\ &= -75.81 \text{ cal/K} = -316.90 \text{ J/K} \end{aligned}$$

$$\underline{\Delta S_{12} = -316.90 \text{ J/K}}$$

La transformación 2→3 es adiabática de modo que:

$$\underline{\Delta Q_{23} = 0}$$

Además ya sabemos que:

$$\underline{\Delta U_{23} = 10283 \text{ J}}$$

Y por el primer principio:

$$\Delta W_{23} = \Delta Q_{23} - \Delta U_{23} = -10283 \text{ J}$$

$$\underline{\Delta W_{23} = -10283 \text{ J}}$$

$$\Delta S_{23} = \int \frac{dQ_{23}}{T} = 0$$

$$\underline{\Delta S_{23} = 0}$$

La transformación 3→4 es a volumen constante:

$$\Delta U_{34} = n c_V (T_4 - T_3) = 15.625 \cdot 5 \cdot (323 - 192.99) = 10157.03 \text{ cal} = 42456.39 \text{ J}$$

$$\underline{\Delta U_{34} = 42456.39 \text{ J}}$$

$$\underline{\Delta W_{34} = 0}$$

$$\Delta Q_{34} = \Delta U_{34} + \Delta W_{34} = 42456.39 \text{ J}$$

$$\underline{\Delta Q_{34} = 42456.39 \text{ J}}$$

$$\begin{aligned} \Delta S_{34} &= \int \frac{dQ_{34}}{T} = \int \frac{dU_{34}}{T} + \int \frac{dW_{34}}{T} = \int_{T_3}^{T_4} \frac{n c_V dT}{T} = \int_{T_3}^{T_4} \frac{n c_V dT}{T} = n c_V \ln T \Big|_{T_3}^{T_4} = n c_V (\ln T_4 - \ln T_3) = \\ &= n c_V \ln \frac{T_4}{T_3} = 15.625 \cdot 5 \cdot \ln \frac{323}{192.99} = 40.24 \text{ cal/K} = 168.18 \text{ J/K} \end{aligned}$$

$$\underline{\Delta S_{34} = 168.18 \text{ J/K}}$$

Y por último la transformación 4→1 es isoterma:

$$\underline{\Delta U_{41} = 0}$$

$$\Delta W_{41} = n R T_4 \ln \frac{V_1}{V_4} = 15.625 \cdot 2 \cdot 323 \cdot \ln \frac{413.84}{132.56} = 11491.17 \text{ cal} = 48033.09 \text{ J}$$

$$\underline{\Delta W_{41} = 48033.09 \text{ J}}$$

$$\Delta Q_{41} = \Delta U_{41} + \Delta W_{41} = 48033.09 \text{ J}$$

$$\underline{\Delta Q_{41} = 48033.09 \text{ J}}$$

$$\Delta S_{41} = \int \frac{dQ_{41}}{T} = \int \frac{dU_{41}}{T} + \int \frac{dW_{41}}{T} = \int \frac{dW_{41}}{T} = \int \frac{dQ_{41}}{T} = \frac{\Delta Q_{41}}{T_4} = \frac{48033.09}{323} = 148.71 \text{ J/K}$$

$$\underline{\Delta S_{41} = 148.71 \text{ J/K}}$$

Ahora para el ciclo completo tendremos que la energía interna, por ser una variable de estado:

$$\underline{\Delta U = 0}$$

Podemos comprobar que efectivamente:

$$\Delta U = \Delta U_{12} + \Delta U_{23} + \Delta U_{34} + \Delta U_{41} = -52739.84 + 10283 + 42456.39 = -0.45 \text{ J} \approx 0$$

Para el trabajo:

$$\Delta W = \Delta W_{12} + \Delta W_{23} + \Delta W_{34} + \Delta W_{41} = -20966.11 - 10283 + 48033.09 = 16783.98 \text{ J}$$

$$\underline{\Delta W = 16783.98 \text{ J}}$$

Para el calor:

$$\Delta Q = \Delta Q_{12} + \Delta Q_{23} + \Delta Q_{34} + \Delta Q_{41} = -73705.95 + 42456.39 + 48033.09 = 16783.53 \text{ J}$$

$$\underline{\Delta Q = 16783.53 \text{ J}}$$

Podemos ver que además se cumple el primer principio, ya que para el ciclo completo, puesto que la variación de energía interna es cero, la variación de trabajo debe ser igual a la variación de calor.

Por último, como la entropía también es una variable de estado:

$$\underline{\Delta S = 0}$$

Podemos comprobar que efectivamente:

$$\Delta S = \Delta S_{12} + \Delta S_{23} + \Delta S_{34} + \Delta S_{41} = -316.90 + 168.18 + 148.71 = -0.01 \text{ J/K} \approx 0$$

d) El rendimiento termodinámico del ciclo es:

$$\eta = \frac{\Delta W}{\Delta Q_{\text{abs}}} = \frac{16783.98}{42456.39 + 48033.09} = 0.1855 = 18.55\%$$

$$\underline{\eta = 18.55\%}$$

e) Para un ciclo de Carnot que opere entre las temperaturas extremas:

$$\eta_C = 1 - \frac{T_2}{T_1} = 1 - \frac{161.50}{323} = 0.5 = 50\%$$

$$\underline{\eta_C = 50\%}$$