

a) En el estado 1 nos dan todos los parámetros luego:

$$\underline{P_1=1 \text{ atm}}$$

$$T_1=18^\circ\text{C}=291 \text{ K}$$

$$\underline{T_1=291 \text{ K}}$$

La presión en el estado 2 la podemos determinar ya que en el gráfico podemos ver que:

$$P_2=3P_1=3 \cdot 1=3 \text{ atm}$$

$$\underline{P_2=3 \text{ atm}}$$

Además, la transformación 1→2 es isocora (a volumen constante), luego de la ecuación de los gases perfectos:

$$PV = nRT \Rightarrow \frac{nR}{V} = \text{cte} \Rightarrow \frac{P}{T} = \text{cte} \Rightarrow \frac{P_1}{T_1} = \frac{P_2}{T_2} \Rightarrow \frac{1}{291} = \frac{3}{T_2} \Rightarrow T_2 = 873 \text{ K P}$$

$$\underline{T_2=873 \text{ K}}$$

Por ser una transformación isocora sabemos también que $V_2=V_1=2 \text{ l}$.

En el estado 3 podemos determinar el volumen mediante la gráfica:

$$V_3=4V_1=4 \cdot 2=8 \text{ l}$$

Como esta transformación 2→3 es adiabática:

$$PV^\gamma = \text{cte} \Rightarrow P_2 V_2^\gamma = P_3 V_3^\gamma \Rightarrow 3 \cdot 2^{1.4} = P_3 \cdot 8^{1.4} \Rightarrow P_3 = 0.431 \text{ atm}$$

$$\underline{P_3=0.431 \text{ atm}}$$

Para determinar la temperatura podemos tener en cuenta que en el sistema no entra materia, es decir, el número de moles es constante. De la ecuación de los gases perfectos entonces:

$$PV = nRT \Rightarrow nR = \text{cte} \Rightarrow \frac{PV}{T} = \text{cte} \Rightarrow \frac{P_2 V_2}{T_2} = \frac{P_3 V_3}{T_3} \Rightarrow \frac{3 \cdot 2}{873} = \frac{0.431 \cdot 8}{T_3} \Rightarrow T_3 = 501.41 \text{ K}$$

$$\underline{T_3=501.41 \text{ K}}$$

La transformación 3→4 es isocora luego conocemos el volumen del estado 4:

$$V_3=V_4=8 \text{ l}$$

Además, posteriormente tenemos que la transformación 4→1 es adiabática, luego se verificará:

$$PV^\gamma = \text{cte} \Rightarrow P_4 V_4^\gamma = P_1 V_1^\gamma \Rightarrow P_4 \cdot 8^{1.4} = 1 \cdot 2^{1.4} \Rightarrow P_4 = 0.144 \text{ atm}$$

$$\underline{P_4=0.144 \text{ atm}}$$

Por último, la temperatura T_4 la podemos hallar teniendo en la transformación 3→4 el volumen permanece constante:

$$PV = nRT \Rightarrow \frac{nR}{V} = \text{cte} \Rightarrow \frac{P}{T} = \text{cte} \Rightarrow \frac{P_3}{T_3} = \frac{P_4}{T_4} \Rightarrow \frac{0.431}{501.41} = \frac{0.144}{T_4} \Rightarrow T_4 = 167.04 \text{ K}$$

$$\underline{T_4=167.04 \text{ K}}$$

b) Determinaremos en primer lugar el número de moles que tenemos aplicando la ecuación de los gases perfectos; como el número de moles es constante, podemos determinarlo en cualquiera de los cuatro estados:

$$P_1 V_1 = nRT_1 \Rightarrow n = \frac{P_1 V_1}{RT_1} = \frac{1 \cdot 2}{0.082 \cdot 291} = 0.0838 \text{ moles}$$

Además, tendremos las ecuaciones:

$$\frac{c_p}{c_v} = \gamma \Rightarrow c_p = \gamma c_v = 1.4c_v$$

$$c_p - c_v = R \Rightarrow 1.4c_v - c_v = 2 \Rightarrow 0.4c_v = 2 \Rightarrow c_v = 5 \text{ cal/molK}$$

Para la transformación 1→2 la variación de energía interna es:

$$\Delta U_{12} = nc_v(T_2 - T_1) = 0.0838 \cdot 5(873 - 291) = 243.858 \text{ cal} = 1019.33 \text{ J}$$

$$\underline{\Delta U_{12} = 1019.33 \text{ J}}$$

Y por ser esta transformación isocora:

$$\underline{\Delta W_{12} = 0}$$

La variación de entropía:

$$\begin{aligned} \Delta S_{12} &= \int \frac{dQ}{T} = \int \frac{dU + dW}{T} = \int \frac{dU}{T} + \int \frac{dW}{T} = \int \frac{dU}{T} = \int_{T_1}^{T_2} \frac{nc_v dT}{T} = nc_v \ln T \Big|_{T_1}^{T_2} = nc_v (\ln T_2 - \ln T_1) = \\ &= nc_v \ln \frac{T_2}{T_1} = 0.0838 \cdot 5 \cdot \ln \frac{873}{291} = 0.46 \text{ cal/K} = 1.92 \text{ J/K} \end{aligned}$$

$$\underline{\Delta S_{12} = 1.92 \text{ J/K}}$$

Para la transformación 2→3:

$$\Delta U_{23} = nc_v(T_3 - T_2) = 0.0838 \cdot 5(501.41 - 873) = -155.70 \text{ cal} = -650.81 \text{ J}$$

$$\underline{\Delta U_{23} = -650.81 \text{ J}}$$

Por ser una transformación adiabática $\Delta Q_{23} = 0$, lo cual implica que a través del primer principio podemos poner:

$$\Delta U_{23} = \Delta Q_{23} - \Delta W_{23} \Rightarrow \Delta U_{23} = -\Delta W_{23} \Rightarrow \Delta W_{23} = -\Delta U_{23} = 650.81 \text{ J}$$

$$\underline{\Delta W_{23} = 650.81 \text{ J}}$$

Como no hay variación de calor, tampoco habrá variación de entropía:

$$\underline{\Delta S_{23} = 0}$$

Para la transformación 3→4 la variación de energía interna es:

$$\Delta U_{34} = nc_v(T_4 - T_3) = 0.0838 \cdot 5(167.04 - 501.41) = -140.10 \text{ cal} = -585.62 \text{ J}$$

$$\underline{\Delta U_{34} = -585.62 \text{ J}}$$

Por ser esta transformación isocora:

$$\underline{\Delta W_{34} = 0}$$

La variación de entropía:

$$\begin{aligned}\Delta S_{34} &= \int \frac{dQ}{T} = \int \frac{dU + dW}{T} = \int \frac{dU}{T} + \int \frac{dW}{T} = \int \frac{dU}{T} = \int_{T_3}^{T_4} \frac{nc_V dT}{T} = nc_V \ln T \Big|_{T_3}^{T_4} = nc_V (\ln T_4 - \ln T_3) = \\ &= nc_V \ln \frac{T_4}{T_3} = 0.0838 \cdot 5 \cdot \ln \frac{167.04}{501.41} = -0.46 \text{ cal/K} = -1.92 \text{ J/K}\end{aligned}$$

$$\underline{\Delta S_{34} = -1.92 \text{ J/K}}$$

Por último, para la transformación 4→1:

$$\Delta U_{41} = nc_V(T_1 - T_4) = 0.0838 \cdot 5(291 - 167.04) = 51.94 \text{ cal} = 217.11 \text{ J}$$

$$\underline{\Delta U_{41} = 217.11 \text{ J}}$$

Puesto que dicha transformación es adiabática $\Delta Q_{41} = 0$ y del primer principio:

$$\Delta U_{41} = \Delta Q_{41} - \Delta W_{41} \Rightarrow \Delta U_{41} = -\Delta W_{41} \Rightarrow \Delta W_{41} = -\Delta U_{41} = -217.11 \text{ J}$$

$$\underline{\Delta W_{41} = -217.11 \text{ J}}$$

Y por no haber variación de calor en esta transformación tampoco hay variación de entropía:

$$\underline{\Delta S_{41} = 0}$$

Podemos ver que como se trata de un ciclo, las variables de estado (energía interna y entropía) son nulas:

$$\Delta U = \Delta U_{12} + \Delta U_{23} + \Delta U_{34} + \Delta U_{41} = 1019.33 - 650.81 - 585.62 + 217.11 \approx 0$$

$$\Delta S = \Delta S_{12} + \Delta S_{23} + \Delta S_{34} + \Delta S_{41} = 1.92 + 0 - 1.92 + 0 = 0$$

c) El rendimiento del ciclo es el cociente entre el trabajo realizado y el calor absorbido por el ciclo. Nos falta entonces determinar el calor absorbido en todo el ciclo. De las cuatro transformaciones, la 2→3 y la 4→1 son adiabáticas luego en ellas no hay variación de calor. En las otras dos podemos determinar la variación de calor mediante la aplicación del primer principio:

$$\Delta U = \Delta Q - \Delta W \Rightarrow \Delta Q = \Delta U + \Delta W$$

Para la transformación 1→2:

$$\Delta Q_{12} = \Delta U_{12} + \Delta W_{12} = 1019.33 \text{ J}$$

Y para la transformación 3→4:

$$\Delta Q_{34} = \Delta U_{34} + \Delta W_{34} = -585.62 \text{ J}$$

Este calor es cedido, luego sólo nos vale ΔQ_{12} ; el rendimiento del ciclo es entonces:

$$\eta = \frac{\Delta W}{\Delta Q_{\text{absorbido}}} = \frac{\Delta W_{12} + \Delta W_{23} + \Delta W_{34} + \Delta W_{41}}{\Delta Q_{12}} = \frac{0 + 650.81 + 0 - 217.11}{1019.33} = 0.4255 = 42.55\%$$

$$\underline{\eta = 42.55\%}$$