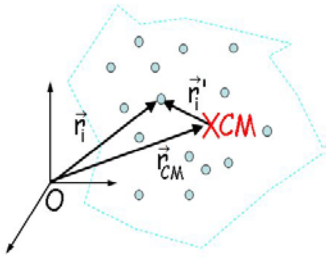
a) Dado un sistema de partículas definimos la posición del centro de masas como:

$$\mathbf{r_{CM}} = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i \mathbf{r_i}}{\sum_{i=1}^{N} m_i} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{N} m_i \mathbf{r_i}$$

El movimiento general del sistema de partículas se suele poner como el movimiento del centro de masas (traslación) más el movimiento interno del sistema (movimiento de las partículas respecto al centro de masas, rotación en el caso de un sólido rígido). Se denomina **Sistema Centro de Masas** a un sistema de referencia con ejes que mantienen constante su dirección y cuyo origen coincide en todo momento con el centro de masas del sistema. Este sistema no tiene porque ser inercial.



Notemos que respecto al centro de masas:

$$\mathbf{r}_{CM}+\mathbf{r'}_i=\mathbf{r}_i \Rightarrow \mathbf{r'}_i=\mathbf{r}_i-\mathbf{r}_{CM}$$

Además:

$$\sum_{i=1}^{N} m_i \mathbf{r'_i} = 0$$

Ya que:

$$\mathbf{r_{CM}^{CM}} = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i \mathbf{r'_i}}{\sum_{i=1}^{N} m_i} = 0$$

Derivando en la expresión anterior:

$$\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{N} m_i \mathbf{r'_i} = \sum_{i=1}^{N} m_i \mathbf{v'_i} = 0 \Rightarrow \mathbf{P'} = \mathbf{P^{CM}} = \sum_{i=1}^{N} m_i \mathbf{v'_i} = 0$$

b) El coeficiente de restitución del choque entre dos partículas A y B en función de las velocidades iniciales y finales vale:

$$e = \frac{v'_B - v'_A}{v_A - v_B}$$

Si el choque es completamente inelástico e=0 de modo que nos queda:

$$e = \frac{v'_B - v'_A}{v_A - v_B} \Rightarrow 0 = \frac{v'_B - v'_A}{v_A - v_B} \Rightarrow v'_B - v'_A = 0 \Rightarrow v'_B = v'_A = v'$$

Las partículas después del choque tienen la misma velocidad y por tanto salen juntas. En esta situación las fuerzas restauradoras son nulas y por tanto se disipa energía. Las fuerzas no son conservativas, pero se puede aplicar la conservación de la cantidad de movimiento (tendremos en cuenta ya que antes del choque la partícula B está en reposo, v_B=0):

$$\mathbf{p}_{\mathbf{antes}}=\mathbf{p}_{\mathbf{después}} \Rightarrow m_A v_A=(m_A+m_B)v' \Rightarrow v' = \frac{m_A}{m_A + m_B} v_A$$

Así, las energías cinéticas antes y después del choque son:

$$E_C = \frac{1}{2} m_A v_A^2$$

$$E'_C = \frac{1}{2}(m_A + m_B)v'^2 = \frac{1}{2}(m_A + m_B)\left(\frac{m_A}{m_A + m_B} v_A\right)^2 = \frac{1}{2}\frac{m_A^2}{(m_A + m_B)} v_A^2$$

Tendremos pues:

$$\frac{E'_C}{E_C} = \frac{\frac{1}{2}\frac{m_A^2}{(m_A + m_B)} v_A^2}{\frac{1}{2} m_A v_A^2} = \frac{m_A}{m_A + m_B} \Rightarrow E'_C = \frac{m_A}{m_A + m_B} E_C$$

donde puede verse que efectivamente se pierde energía cinética ya que $E'_C < E_C$.

Si $m_A = m_B = m$:

$$E'_C = \frac{m_A}{m_A + m_B} E_C = \frac{m}{m + m} E_C = \frac{m}{2m} E_C = \frac{E_C}{2}$$

También podemos determinar la variación de energía cinética, que será:

$$\Delta E_C = E'_C - E_C = \frac{1}{2}\frac{m_A^2}{(m_A + m_B)} v_A^2 - \frac{1}{2} m_A v_A^2 = \frac{1}{2}\frac{m_A^2 - m_A^2 - m_A m_B}{m_A + m_B} v_A^2 = -\frac{1}{2}\frac{m_A m_B}{m_A + m_B} v_A^2$$

donde también puede verse que se pierde energía cinética, ya que la variación de dicho parámetro es negativo.

En esta expresión, si $m_A = m_B = m$:

$$\Delta E_C = -\frac{1}{2}\frac{m_A m_B}{m_A + m_B} v_A^2 = -\frac{1}{2}\frac{mm}{m + m} v_A^2 = -\frac{1}{2}\frac{m^2}{2m} v_A^2 = -\frac{1}{2}\frac{m}{2} v_A^2 = -\frac{E_C}{2}$$