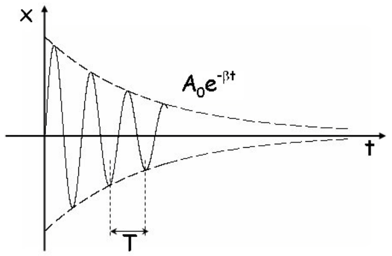
En el movimiento amortiguado tenemos que resolver la ecuación diferencial:

$$m\ddot{x} + \gamma\dot{x} + kx = 0 \Rightarrow \ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

La solución de esta ecuación diferencial depende del valor de $\beta(\gamma)$ frente a ω_0, y tenemos tres casos:

- $\beta<\omega_0 \Rightarrow$ amortiguamiento débil
- $\beta=\omega_0 \Rightarrow$ amortiguamiento crítico
- $\beta>\omega_0 \Rightarrow$ amortiguamiento supercrítico

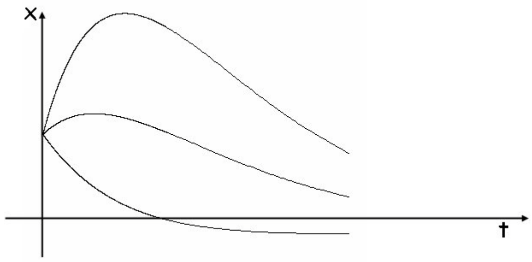
Vamos a ver en qué consiste cada uno de ellos.



En el amortiguamiento débil ($\beta<\omega_0$) la solución de la ecuación diferencial es:

$$x = A_0 e^{-\beta t}\,\mathrm{sen}(\omega' t + \varphi)$$

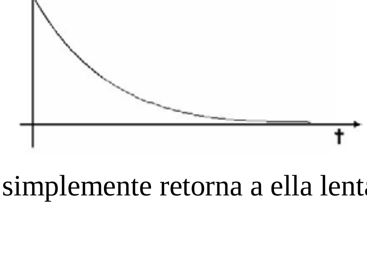
siendo $\omega' = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$. En este caso la amplitud no es constante (por tanto no es un movimiento armónico simple) sino que decrece exponencialmente con el tiempo. El movimiento no es estrictamente periódico, aunque se puede considerar $T = \dfrac{2\pi}{\omega'}$. Matemáticamente la amplitud se hace cero en el infinito, pero en la realidad se observa que el sistema llega a perder toda la energía y se para.



En el amortiguamiento crítico ($\beta=\omega_0$) podemos ver que $\omega' = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} = 0$ y no está definida la frecuencia. De hecho, la solución no es oscilatoria, sino que es:

$$x(t) = (A_0 + A_1 t)e^{-\beta t}$$

donde A_0 y A_1 son dos constantes que dependen de las condiciones iniciales. El sistema efectúa una única oscilación y vuelve lentamente a la posición de equilibrio, por lo que son sistemas de especial interés en el diseño de mecanismos destinados a evitar vibraciones, como los amortiguadores de los coches.



En el amortiguamiento supercrítico o sobreamortiguado ($\beta>\omega_0$) tendremos que la frecuencia $\omega' = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$ es imaginaria, y la solución no viene dada por funciones sinusoidales sino por funciones hiperbólicas que son en esencia exponenciales. El sistema en este caso no efectúa ninguna oscilación y al separarlo de la posición de equilibrio simplemente retorna a ella lentamente. La solución de la ecuación en este caso es:

$$x(t) = A_1 e^{-\omega_1 t} + A_2 e^{-\omega_2 t}$$

siendo A_1 y A_2 constantes de integración que dependen de las condiciones iniciales, y:

$$\omega_1 = \beta + \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}$$

$$\omega_2 = \beta - \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}$$