1.- Para una masa (m) unida a un muelle, en el caso de un movimiento armónico simple la única fuerza que actúa es la del resorte (de constante k). De la segunda ley de Newton:

$$\Sigma F_X = m\ddot{x} \Rightarrow -kx = m\ddot{x} \Rightarrow m\ddot{x} + kx = 0 \Rightarrow \ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0$$

Dicha ecuación tiene la forma $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$, donde la frecuencia angular natural será:

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m} \Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

La solución de esta ecuación es:

$$x = A_0 \mathrm{sen}(\omega_0 t + \varphi)$$

siendo A_0 la amplitud del movimiento (desplazamiento máximo) y φ el desfase inicial (ángulo cuando t=0). (A_0 y φ son función de las condiciones iniciales $\{x_0, v_0\}$).

2.- Si el movimiento es amortiguado aparece una fuerza resistente. Esta fuerza puede tener muchas formas, pero nos centraremos en la llamada resistencia viscosa, donde la fuerza que se opone al movimiento es proporcional a la velocidad de la partícula, siendo el coeficiente de proporcionalidad la llamada constante de amortiguamiento (γ):

$$F_R = -\gamma\dot{x}$$

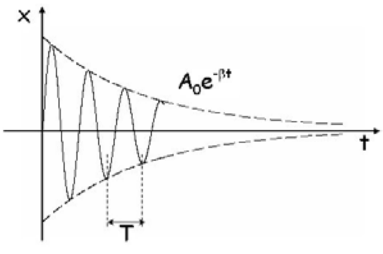
Así, la ecuación nos queda ahora:

$$\Sigma F_X = m\ddot{x} \Rightarrow -kx - \gamma\dot{x} = m\ddot{x} \Rightarrow m\ddot{x} + \gamma\dot{x} + kx = 0 \Rightarrow \ddot{x} + \frac{\gamma}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0 \Rightarrow \ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

El parámetro $\beta = \frac{\gamma}{2m}$ recibe el nombre de parámetro de amortiguamiento. Este parámetro es fundamental ya que la solución de la ecuación diferencial depende del valor de β frente a ω_o, teniendo tres casos diferentes:

a) Si $\beta < \omega_0$ el amortiguamiento es débil y la solución de la ecuación es:

$$x = A_0 e^{-\beta t} \mathrm{sen}(\omega' t + \varphi)$$



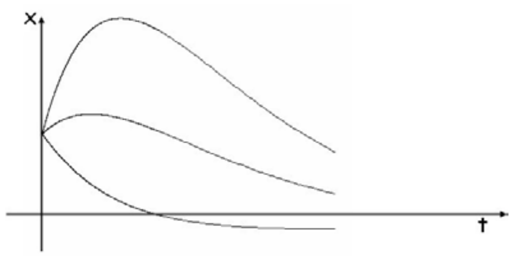
con $\omega' = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$.(A_o y φ son función de las condiciones iniciales $\{x_o, v_o\}$). La amplitud no es constante y ya no es un movimiento armónico simple, sino que dicha amplitud decrece exponencialmente con el tiempo:

$$A = A_0 e^{-\beta t}$$

El movimiento no es estrictamente periódico y no existe un período estricto, aunque se puede considerar:

$$T = \frac{2\pi}{\omega'}$$

Matemáticamente la amplitud se hace nula en el infinito, pero en la realidad se observa que el sistema pierde toda la energía y acaba parándose en un intervalo de tiempo finito.

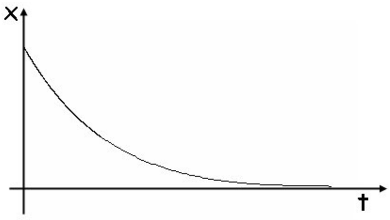


b) Si $\beta=\omega_0$ el amortiguamiento es crítico, la frecuencia ω' es nula y la solución no es oscilatoria:

$$x=(A_0+A_1t)e^{-\beta t}$$

(Ao y A_1 son constantes de integración que dependen de las condiciones iniciales).

Esta situación tiene interés para el diseño de sistemas en que no se desean vibraciones y se pretenda tender rápidamente a una situación de equilibrio, por ejemplo, amortiguadores.



c) Por último, si $\beta>\omega_0$ el amortiguamiento es supercrítico o se dice que el movimiento es sobreamortiguado. La frecuencia ω' sería imaginaria, y la solución no tiene funciones sinusoidales, sino hiperbólicas (en esencia, exponenciales):

$$x = A_1 e^{-\omega_1 t} + A_2 e^{-\omega_2 t} \quad \text{con} \quad \begin{cases} \omega_1 = \beta + \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2} \\ \omega_2 = \beta - \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2} \end{cases}$$

(A_1 y A_2 son constantes de integración que dependen de las condiciones iniciales).

3.- En la situación real la oscilación de la partícula no se mantiene indefinidamente incluso aunque apliquemos una fuerza momentánea, por lo que <u>si queremos mantener la oscilación tenemos que mantener también la fuerza, y el movimiento se denomina forzado</u>. Un caso de interés ocurre si la fuerza es sinusoidal:

$$F=F_0 \operatorname{sen}\omega t$$

La ecuación dinámica ahora será:

$$\Sigma F_X = m\ddot{x} \Rightarrow m\ddot{x} + \gamma\dot{x} + kx = F_0 \operatorname{sen}\omega t \Rightarrow \ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m}\operatorname{sen}\omega t$$

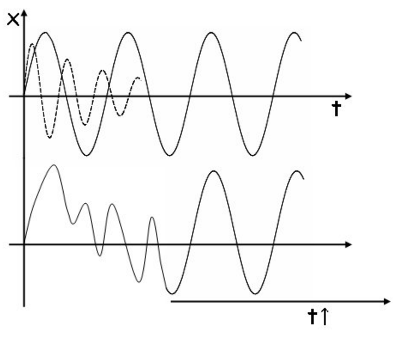
La solución de esta ecuación consta de dos partes, en primer lugar la solución de la parte homogénea:

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

Ya hemos visto que la solución de esta ecuación depende del tipo de amortiguamiento. Consideremos el amortiguamiento débil, cuya solución sería:

$$x_h=A_0e^{-\beta t}\operatorname{sen}(\omega' t+\varphi) \text{ con } \omega' = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$$

Y tendríamos además la solución particular, que es de la forma:



$$x_p=A\operatorname{sen}(\omega t-\delta)$$

donde A depende de las características del sistema que oscila (ω_o, m), del amortiguamiento (β) y de la fuerza impulsora (Fo, ω). Esta solución indica un movimiento oscilatorio sinusoidal de frecuencia ω.

La solución general será entonces:

$$x=x_h+x_p=A_0e^{-\beta t}\mathrm{sen}(\omega' t+\varphi)+A\mathrm{sen}(\omega t-\delta)$$

La primera parte de la ecuación es temporal y desaparece con el tiempo, y permanece la solución particular o parte estacionaria o permanente. Así, la frecuencia estacionaria o permanente es la de la fuerza aplicada ω.