a) Dado un sistema de partículas definimos la posición del centro de masas como:

$$\mathbf{r_{CM}} = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i \mathbf{r_i}}{\sum_{i=1}^{N} m_i} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{N} m_i \mathbf{r_i}$$

Al variar en el transcurso del tiempo las posiciones de las partículas que constituyen el sistema, también variará la posición del centro de masas del mismo respecto a un marco de referencia dado. Determinaremos la velocidad del centro de masas del sistema derivando respecto del tiempo la expresión de su vector de posición:

$$\mathbf{r_{CM}} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{N} m_i \mathbf{r_i} \Rightarrow \frac{d\mathbf{r_{CM}}}{dt} = \mathbf{v_{CM}} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{N} m_i \mathbf{v_i}$$

Puesto que $\mathbf{p_i}=m_i\mathbf{v_i}$ y $\mathbf{P} = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{p_i}$, podemos escribir:

$$\mathbf{v_{CM}} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{N} m_i \mathbf{v_i} = \frac{\mathbf{P}}{m} \Rightarrow \mathbf{P} = m\mathbf{v_{CM}}$$

de modo que la cantidad de movimiento total del sistema de partículas (**P**) es la que correspondería al caso en que toda las masa del sistema (m) estuviese concentrada en el centro de masas del mismo y se moviese con la velocidad de éste ($\mathbf{v_{CM}}$). Esta es la razón de que en ocasiones se llama $\mathbf{v_{CM}}$ la velocidad del sistema. Así, cuando hablamos de la velocidad de un cuerpo móvil, compuesto por muchas partículas, como puede ser la Tierra, un automóvil, una molécula…, nos referimos en realidad a la velocidad de su centro de masas.

En el caso de que se trate de un sistema aislado, o de un sistema sobre el que sea nula la resultante de las fuerzas externas $\left(\sum_{i=1}^{N} \mathbf{F_i} = 0 \Rightarrow \mathbf{P} = \text{cte} \Rightarrow \mathbf{v_{CM}} = \text{cte}\right)$, la cantidad de movimiento total permanece constante en el transcurso del tiempo, conforme el sistema evoluciona, y por consiguiente podemos enunciar el principio de conservación de este modo:

El centro de masas de un sistema aislado se mueve con velocidad constante con respecto a un marco de referencia inercial.

Si no se tratase de un sistema aislado, esto es, si tuviésemos una fuerza resultante externa no nula, podemos determinar la aceleración del centro de masas derivando la expresión del momento lineal con respecto al tiempo:

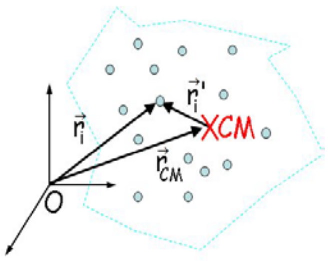
$$\mathbf{P} = m\mathbf{v_{CM}} \Rightarrow \frac{d\mathbf{P}}{dt} = m\frac{d\mathbf{v_{CM}}}{dt} = m\mathbf{a_{CM}} = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{F_i} = \mathbf{F} \Rightarrow \mathbf{F} = m\mathbf{a_{CM}}$$

Esta ecuación tiene la misma forma que la ecuación del movimiento de una partícula de masa m sobre la que actúa una fuerza externa **F**. en definitiva, podemos interpretar esta expresión del siguiente modo:

El centro de masas de un sistema de partículas se mueve como una sola partícula, cuya masa fuese la masa total del sistema, sometida a una fuerza igual a la resultante de las fuerzas externas que actúan sobre el sistema.

c) El movimiento general del sistema de partículas se suele poner como el movimiento del centro de masas (traslación) más el movimiento interno del sistema (movimiento de las partículas respecto al centro de masas, rotación en el caso de un sólido rígido). Se denomina **Sistema Centro de Masas** a un sistema de referencia con ejes que mantienen constante su dirección y cuyo origen coincide en todo momento con el centro de masas del sistema. Este sistema no tiene por qué ser inercial.

Notemos que respecto al centro de masas:



$$\mathbf{r}_{CM}+\mathbf{r'}_i=\mathbf{r}_i \Rightarrow \mathbf{r'}_i=\mathbf{r}_i-\mathbf{r}_{CM}$$

Además:

$$\sum_{i=1}^{N} m_i \mathbf{r'_i} = 0$$

Ya que:

$$\mathbf{r}_{\mathbf{CM}}^{\mathbf{CM}} = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i \mathbf{r'_i}}{\sum_{i=1}^{N} m_i} = 0$$

Derivando en la expresión anterior:

$$\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{N} m_i \mathbf{r'_i} = \sum_{i=1}^{N} m_i \mathbf{v'_i} = 0 \Rightarrow \mathbf{P'} = \mathbf{P}^{\mathbf{CM}} = \sum_{i=1}^{N} m_i \mathbf{v'_i} = 0$$