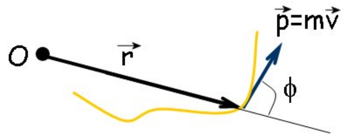


a) El momento angular o cinético con respecto a un punto arbitrario O (fijo en un cierto sistema de referencia inercial) de una partícula de masa m y velocidad **v** (en ese mismo sistema de referencia) o sea, de cantidad de movimiento **p**=m**v**, se define como el producto vectorial:

$$\mathbf{L_O}=\mathbf{r} \text{ x } m\mathbf{v}=\mathbf{r} \text{ x } \mathbf{p}$$

donde **r** es el vector de posición de la partícula con respecto al punto O (**r**=**OP**). De acuerdo con la definición anterior, el momento angular de una partícula con respecto a un punto dado es el momento de la cantidad de movimiento de la partícula con respecto a dicho punto. El momento angular es un vector perpendicular al plano definido por el punto arbitrario (O) elegido como origen de momentos y la recta directriz de la cantidad de movimiento de la partícula, su sentido es el determinado pro la regla de la mano derecha o del tornillo para el producto vectorial y su módulo viene dado por:

$$L_O=rp\,\mathrm{sen}\phi=pd$$

donde d es el llamado brazo de la cantidad de movimiento con respecto al punto O elegido y representa la distancia de dicho punto a la recta directriz del vector **p**.

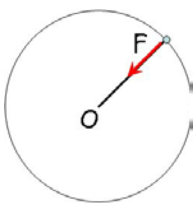
En general, el momento angular de una partícula cambia en módulo y en dirección conforme ésta se mueve. Sin embargo, en el caso de que la partícula describa una trayectoria plana, al tomar como origen de momentos un punto cualquiera del plano de la trayectoria y teniendo en cuenta que en coordenadas polares: $\mathbf{v}=\mathbf{v_r}+\mathbf{v_\theta}$, tendremos que:

$$\mathbf{L_O}=\mathbf{r} \text{ x } m\mathbf{v}=\mathbf{r} \text{ x } m(\mathbf{v_r}+\mathbf{v_\theta})=\mathbf{r} \text{ x } (m\mathbf{v_r}+m\mathbf{v_\theta})=\mathbf{r} \text{ x } m\mathbf{v_r}+\mathbf{r} \text{ x } m\mathbf{v_\theta}=\mathbf{r} \text{ x } m\mathbf{v_\theta}$$

siendo nulo el producto **r** x m$\mathbf{v_r}$ por ser **r** y $\mathbf{v_r}$ dos vectores paralelos. Nos queda pues:

$$\mathbf{L_O}=\mathbf{r}\times m\mathbf{v}_\theta \Rightarrow L_O=rmv_\theta=rmr\dot{\theta}=mr^2\dot{\theta}=mr^2\frac{d\theta}{dt}=mr^2\omega$$

Puesto que mr^2 es un escalar, el momento angular L_0 tiene la dirección de $\boldsymbol{\omega}$, es decir, la del eje de rotación, siempre perpendicular al plano del movimiento.



b) Se dice que una partícula está sometida a la acción de una fuerza central cuando la recta directriz de la fuerza pasa siempre por el punto O elegido como centro u origen de momento.

A partir de la definición de momento angular ($\mathbf{L_O}=\mathbf{r}\text{x}m\mathbf{v}$) obtenemos su derivada respecto del tiempo:

$$\frac{d\mathbf{L_O}}{dt}=\frac{d}{dt}(\mathbf{r}\times m\mathbf{v})=\frac{d\mathbf{r}}{dt}\times m\mathbf{v}+\mathbf{r}\times\frac{d}{dt}(m\mathbf{v})=\mathbf{v}\times m\mathbf{v}+\mathbf{r}\times\frac{d\mathbf{p}}{dt}=\mathbf{r}\times\mathbf{F}=\mathbf{M_O}$$

donde hemos tenido en cuenta que el producto **v** x m**v** es nulo por tratarse del producto vectorial de dos vectores paralelos. De este modo hemos establecido una relación importante entre el momento angular de la partícula y el momento de la fuerza que sobre ella actúa:

$$\mathbf{M_O}=\frac{d\mathbf{L_O}}{dt}$$

Si la partícula está sometida a una fuerza central, evidentemente el momento respecto del centro de fuerzas es nulo, y por tanto, el momento angular es constante:

$$\mathbf{M_O}=\frac{d\mathbf{L_O}}{dt}\Rightarrow\mathbf{M_O}=0\Rightarrow\frac{d\mathbf{L_O}}{dt}=0\Rightarrow\mathbf{L_O}=\text{cte}$$

Y además, como **F** siempre es paralela a la dirección de **r**, el movimiento estará siempre contenido en un plano.