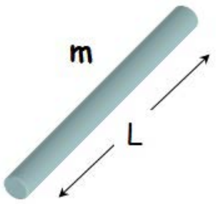
a) Definimos el centro de masas de un sistema de partículas como el punto cuyo vector de posición es:

$$\mathbf{r}_{\mathbf{CM}} = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i \mathbf{r}_i}{\sum_{i=1}^{N} m_i} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{N} m_i \mathbf{r}_\mathbf{i}$$

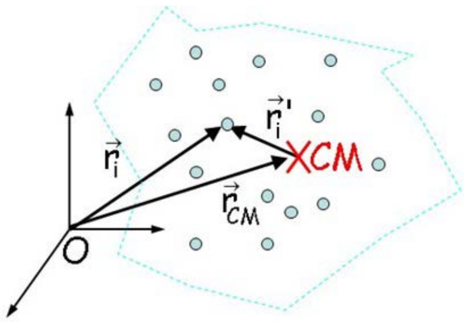
En coordenadas cartesianas la posición del centro de masas viene dada por:

$$x_{CM} = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i x_i}{m}; \quad y_{CM} = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i y_i}{m}; \quad z_{CM} = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i z_i}{m}$$



b) Se debe notar que si un cuerpo tiene un centro geométrico y la distribución de masas es homogénea, el C.M. coincide con el centro geométrico (C.G.), y que si un cuerpo tiene un eje de simetría y una distribución homogénea de masas, el C.M. está situado sobre el eje de simetría. Así, para una varilla homogénea de masas M y longitud L, el centro de masas coincide con el centro geométrico y está situado sobre el eje de simetría, de modo que:

$$x_{CM} = \frac{L}{2}$$



c) Muchas veces es conveniente definir un marco de referencia cuyo origen se encuentre en el centro de masas del sistema de partículas (CM) y cuyos ejes mantengan una orientación fija respecto a un marco de referencia inercial. Tal marco o sistema de referencia recibe el nombre de sistema del centro de masas. Definiremos el vector de posición interno $\mathbf{r'_i}$ de la partícula i-ésima como el vector de origen en el centro de masas y de extremo en dicha partícula, esto es:

$$\mathbf{r_i}=\mathbf{r_{CM}}+\mathbf{r'_i} \Rightarrow \mathbf{r'_i}=\mathbf{r_i}-\mathbf{r_{CM}}$$

Entonces, de acuerdo con la definición del centro de masas, las coordenadas internas $\mathbf{r'_i}$ de las partículas satisfacen la relación:

$$\sum_{i=1}^{N} m_i \mathbf{r'_i} = 0$$

Ya que en el sistema centro de masas:

$$\mathbf{r}_{\mathbf{CM}}^{\mathbf{(CM)}} = 0 \Rightarrow \mathbf{r}_{\mathbf{CM}}^{\mathbf{(CM)}} = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i \mathbf{r'}_i}{\sum_{i=1}^{N} m_i} = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{N} m_i \mathbf{r'}_i = 0$$

puesto que el primer miembro, $\mathbf{r}_{\mathbf{CM}}^{\mathbf{(CM)}}$, representa la posición del centro de masas en un sistema de referencia cuyo origen es precisamente dicho centro de masas.

La velocidad y la cantidad de movimiento internas de la partícula i-ésima serán:

$$\mathbf{v'_i}=\mathbf{v_i}-\mathbf{v_{CM}}$$

$$\mathbf{p'_i}=m_i\mathbf{v'_i}$$

Así, derivando la expresión anterior, tendremos:

$$\sum_{i=1}^{N} m_i \mathbf{r'_i} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{N} m_i \mathbf{r'_i}\right) = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{N} m_i \mathbf{v'_i} = 0 \Rightarrow \mathbf{P'} = \mathbf{P^{(CM)}} = \sum_{i=1}^{N} m_i \mathbf{v'_i} = 0$$

Esta última conclusión es la razón profunda de la importancia dinámica del centro de masas y el motivo de su elección como sistema de referencia. La cantidad de movimiento interna de un sistema de partículas (aislado o no) es siempre nula.