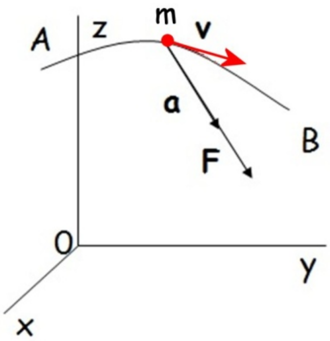


Consideremos una partícula de masa m sobre la que actúa una fuerza única **F** o un conjunto de fuerzas cuya resultante sea **F**, y describamos su movimiento desde un determinado sistema de referencia inercial como se muestra en la figura. Bajo la acción de esa fuerza, o de ese conjunto de fuerzas, la partícula adquiere una aceleración tal que **F**=m**a**. Calculemos el trabajo realizado por la fuerza **F** en un desplazamiento de la partícula entre dos puntos A y B de la trayectoria. Tendremos:

$$W(A \to B) = \int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_A^B m\mathbf{a} \cdot d\mathbf{r} = \int_A^B m \frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot d\mathbf{r} = m\int_A^B d\mathbf{v} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} = m\int_A^B d\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = m\int_A^B \mathbf{v} \cdot d\mathbf{v}$$

Tengamos en cuenta que:

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) = \frac{d}{dt}\left(v^2\right) = \frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \frac{d\mathbf{v}}{dt} = 2\mathbf{v} \cdot \frac{d\mathbf{v}}{dt}$$

De donde tenemos:

$$\frac{d}{dt}\left(v^2\right) = 2\mathbf{v} \cdot \frac{d\mathbf{v}}{dt} \Rightarrow \mathbf{v} \cdot d\mathbf{v} = \frac{d\left(v^2\right)}{2}$$

Así, sustituyendo:

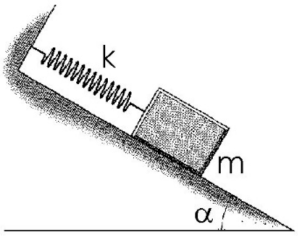
$$W(A \to B) = m\int_A^B \mathbf{v} \cdot d\mathbf{v} = m\int_A^B \frac{d\left(v^2\right)}{2} = m\left.\frac{v^2}{2}\right|_A^B = \frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{1}{2}mv_A^2$$

El término $\frac{1}{2}mv^2$ aparece tan a menudo en las expresiones de la Física que desde hace ya más de un siglo se consideró la conveniencia de considerarlo como una magnitud física importante, a la que se le dio el nombre de energía cinética. Dicha energía es la que posee un cuerpo en razón de su movimiento. Representaremos la energía cinética por E_C, de modo que podemos escribir:

$$W(A \to B) = \frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{1}{2}mv_A^2 = E_{CB} - E_{CA} = \Delta E_C$$

que constituye la expresión del llamado teorema de las fuerzas vivas (o teorema del trabajo-energía cinética), que puede enunciarse de la siguiente forma:

"El trabajo efectuado sobre una partícula es igual a la variación que experimenta su energía cinética".



Supongamos ahora el caso de un cuerpo sobre un plano inclinado con rozamiento y sujeto a un muelle en la parte superior, tal como aparece en la figura. Al desplazarse en el plano inclinado entre dos posiciones A y B el teorema que acabamos de demostrar nos dará la expresión:

$$W(A \to B) = \Delta E_C \Rightarrow W_{mg} + W_{Fr} + W_{k\Delta x} + W_N = \Delta E_C$$

Hemos tenido en cuenta que sobre el bloque actúan cuatro fuerzas: la normal, la fuerza de rozamiento, la de recuperación elástica y el peso. La normal no realiza trabajo porque es siempre perpendicular al desplazamiento, la fuerza elástica y el peso son conservativas, por lo que el trabajo coincide con la variación de energía potencial cambiada de signo, y la fuerza de rozamiento es no conservativa, de modo que tendremos:

$$W_{mg} + W_{Fr} + W_{k\Delta x} + W_N = \Delta E_C \Rightarrow -\Delta U_{mg} - \Delta U_{k\Delta x} + \mathbf{F_r} \cdot \mathbf{d} = \Delta E_C$$

donde denominamos d al espacio recorrido entre las posiciones A y B a lo largo del plano inclinado. Podemos poner:

$$-\Delta U_{mg} - \Delta U_{k\Delta x} + \mathbf{F_r} \cdot \mathbf{d} = \Delta E_C \Rightarrow U_{mgA} - U_{mgB} + U_{k\Delta xA} - U_{k\Delta xB} + F_r d \cos\theta = E_{CB} - E_{CA}$$

siendo θ el ángulo que forma la fuerza de rozamiento con el desplazamiento de su punto de aplicación. Este ángulo es de 180º, ya que la fuerza de rozamiento cinética tiene sentido contrario al desplazamiento. Además, la fuerza de rozamiento en un plano inclinado de este tipo vale:

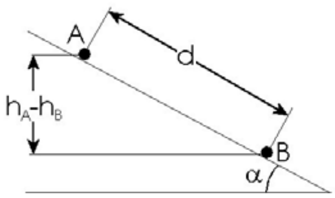
$$F_r=\mu N=\mu mg\cos\alpha$$

Sustituyendo todo esto tendremos:

$$U_{mgA} - U_{mgB} + U_{k\Delta xA} - U_{k\Delta xB} + F_r d \cos\theta = E_{CB} - E_{CA}$$

$$mg(h_A - h_B) + \frac{1}{2}k\left(\Delta x_A^2 + \Delta x_B^2\right) + \mu mg\cos\alpha d\cos 180º = \frac{1}{2}m\left(v_B^2 - v_A^2\right)$$

$$mg(h_A - h_B) + \frac{1}{2}k\left(\Delta x_A^2 + \Delta x_B^2\right) - \mu mg\cos\alpha d = \frac{1}{2}m\left(v_B^2 - v_A^2\right)$$



Y por último podemos relacionar la distancia d que se desplaza el bloque con la altura h que asciende o desciende el bloque:

$$h_A-h_B=d\,sen\alpha$$

Con lo que llegamos a la expresión:

$$mg(h_A - h_B) + \frac{1}{2}k\left(\Delta x_A^2 + \Delta x_B^2\right) - \mu mg\cos\alpha d = \frac{1}{2}m\left(v_B^2 - v_A^2\right)$$

$$mgd\,sen\alpha + \frac{1}{2}k\left(\Delta x_A^2 + \Delta x_B^2\right) - \mu mg\cos\alpha d = \frac{1}{2}m\left(v_B^2 - v_A^2\right)$$