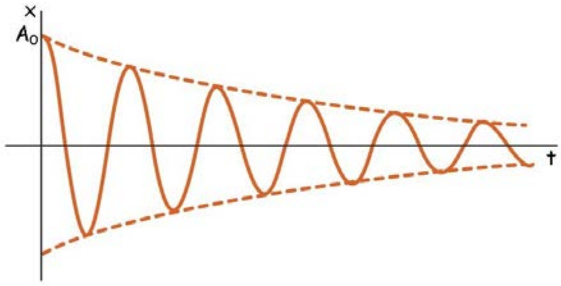


a) Para el M.A.S. el movimiento del oscilador es tal que sus oscilaciones, una vez iniciadas, continúan siempre con la misma amplitud y el movimiento no cesa nunca. En las oscilaciones libres la energía total permanece constante. Sin embargo, las oscilaciones libres no constituyen por lo general una situación física real, ya que normalmente existirá una disipación de energía, de modo que la energía del oscilador, y por ende la amplitud de sus oscilaciones, irán decreciendo continuamente hasta que, finalmente, cesa el movimiento. Hablamos entonces de oscilaciones amortiguadas, en contraposición a las oscilaciones libres.

b) Para analizar dinámicamente las oscilaciones amortiguadas debemos suponer que en adición a la fuerza elástica, F=-kx, actúa una fuerza de rozamiento. Aunque normalmente resulta muy complicado el análisis detallado de los efectos producidos por el rozamiento sobre el movimiento del oscilador, con frecuencia podemos representar esta fuerza mediante una relación empírica cuya expresión matemática es relativamente sencilla y que coincide razonablemente con los resultados experimentales. La fuerza de rozamiento será siempre opuesta a la velocidad de la partícula y en su forma más sencilla es directamente proporcional a dicha velocidad. Este es el caso que se presenta cuando un cuerpo se mueve en un medio fluido (viscoso) con velocidad moderada. Entonces escribiremos:

$$f=-\gamma v$$

donde γ es una constante positiva denominada constante de amortiguamiento. Evidentemente esta fuerza es no conservativa, debido a que es función de la velocidad. Además, puesto que siempre está dirigida en sentido opuesto al movimiento, el trabajo realizado por dicha fuerza es siempre negativo; se trata, pues de una fuerza disipativa. Obsérvese que las dimensiones de la constante de amortiguamiento son:

$$[\gamma]=\left[\frac{F}{v}\right]=\frac{MLT^{-2}}{LT^{-1}}=MT^{-1}$$

esto es, las de una masa dividida por un tiempo. Su unidad en el Sistema Internacional es el kg/s.

Consideremos una masa m que se mueve bajo la acción conjunta de una fuerza restauradora lineal, F=-kx, y de una fuerza resistiva $f=-\gamma v$. Entonces, la ecuación diferencial del movimiento es:

$$\Sigma F = m\ddot{x} \Rightarrow -kx-\gamma v = m\ddot{x}$$

O sea:

$$-kx-\gamma v = m\ddot{x} \Rightarrow m\ddot{x}+\gamma\dot{x}+kx=0$$

Ecuación que es conveniente escribir en la forma:

$$-kx-\gamma v = m\ddot{x} \Rightarrow m\ddot{x}+\gamma\dot{x}+kx=0$$

donde $\beta=\frac{\gamma}{2m}$ y $\omega_0=\sqrt{\frac{k}{m}}$ son, respectivamente, el parámetro de amortiguamiento $\left([\beta]=\left[\frac{\gamma}{2m}\right]=\frac{MT^{-1}}{M}=T^{-1}\right)$ y la frecuencia angular natural del oscilador, esto es, la frecuencia angular de sus oscilaciones en ausencia de amortiguamiento. La ecuación del movimiento es una ecuación diferencial lineal de segundo orden, homogénea (esto es, sin segundo miembro) y de coeficientes constantes. La solución general de esta ecuación diferencial puede obtenerse mediante los métodos normales de resolución de estas ecuaciones diferenciales.

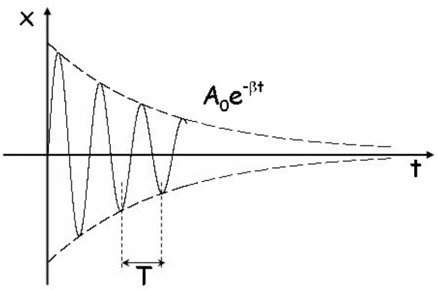
c) Sin entrar en el detalle de la resolución de la ecuación diferencial del movimiento, diremos que el carácter de su solución depende de los valores de los coeficientes β y ω_0. Observemos que β (parámetro de amortiguamiento) será tanto mayor cuanto mayor sea el grado de amortiguamiento. De acuerdo con los valores relativos de β y ω_0 hemos de distinguir tres casos:

- ✓ $\beta<\omega_0 \rightarrow$ el amortiguamiento es débil.
- ✓ $\beta=\omega_0 \rightarrow$ el amortiguamiento es crítico.
- ✓ $\beta>\omega_0 \rightarrow$ el amortiguamiento es supercrítico.
- ✓

En el caso del **amortiguamiento débil** la solución de la ecuación diferencial del movimiento es:

$$x=A_0e^{-\beta t}\mathrm{sen}(\omega' t+\varphi)$$

donde A_0 y φ son dos constantes arbitrarias que se determinaran a partir de las condiciones iniciales y ω' es la frecuencia angular de las oscilaciones amortiguadas, dada por:



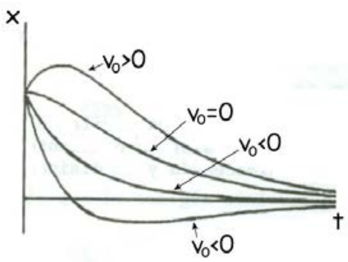
$$\omega' = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$$

La amplitud de las oscilaciones no es constante, ya que está dada por $A=A_0e^{-\beta t}$ y debido al exponente negativo, decrece a medida que transcurre el tiempo. Las curvas cuyas ecuaciones son:

$$x=\pm A_0e^{-\beta t}$$

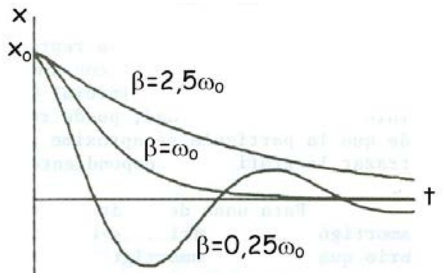
son las envolventes de las curvas x(t) en el oscilador amortiguado. En la figura mostramos estas curvas, así como las curvas de elongación.

Si el amortiguamiento del oscilador aumenta suficientemente, puede llegar a ser $\beta=\omega_0$; esta se conoce con el nombre de **amortiguamiento crítico** del oscilador; se ha alcanzado un valor crítico para el amortiguamiento en el que las oscilaciones desaparecen.



En la figura hemos representado gráficamente las curvas elongación-tiempo para un oscilador con amortiguamiento crítico para $x_0\neq 0$ y diversos valores de la velocidad inicial v_0. Obsérvese cómo, dependiendo del valor inicial de la velocidad, puede rebasarse la posición de equilibrio antes de que la partícula se aproxime asintóticamente a ella.

Para unas determinadas condiciones iniciales, un oscilador con amortiguamiento crítico se aproxima más rápidamente a la posición de equilibrio que uno sobreamortiguado o infraamortiguado. Este hecho es muy importante cuando se diseñan ciertos mecanismos oscilantes (un galvanómetro, por ejemplo) en los que se desea que el mecanismo regrese suave y rápidamente a su posición de equilibrio. Como otro ejemplo de sistema con amortiguamiento crítico o casi-crítico citaremos el sistema de suspensión de un vehículo automóvil; puede comprobarse esto empujando hacia abajo la parte delantera o trasera de un automóvil (a fin de comprimir los amortiguadores) y observando que se producen una o dos oscilaciones antes de que el sistema quede en reposo.



El **sobreamortiguamiento** se presenta cuando el parámetro de amortiguamiento β es mayor que la frecuencia angular natural ω_0 del oscilador. En la figura hemos representado gráficamente las curvas de elongación-tiempo correspondientes a un oscilador infraamortiguado, un oscilador con amortiguamiento crítico y un oscilador sobreamortiguado, para las misma condiciones iniciales $x_0 \neq 0$, $v_0=0$.

d) En el caso del movimiento armónico simple, sin amortiguamiento, el móvil pasa periódicamente por la misma posición, y cabe definir el período como el tiempo que tarda en hacer eso, es decir, en pasar dos veces por la misma posición. Así, definimos la frecuencia natural de la oscilación y el período T correspondiente:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \Rightarrow \omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

$$\omega' = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$$

En el amortiguamiento débil designamos a ω’ con el nombre de frecuencia angular, aunque en un sentido estricto no es posible definir una frecuencia cuando existe amortiguamiento, ya que entonces el movimiento no es periódico; esto es, el oscilador no pasa dos veces por el mismo punto con la misma velocidad (repárese en que la velocidad y la energía total del oscilador van disminuyendo conforme se van completando más y más ciclos). Cuando el amortiguamiento es muy débil, es decir, cuando $\beta <<< \omega_0$, entonces:

$$\omega' = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} \approx \omega_0$$

de modo que podemos llamar frecuencia angular a ω’, aunque esta terminología sólo es absolutamente correcta cuando $\beta=0$. Sin embargo, para simplificar, pasaremos por alto estas consideraciones y nos referiremos a ω’ como a la frecuencia angular de las oscilaciones amortiguadas, frecuencia que siempre será menor que la frecuencia natural del oscilador en ausencia de amortiguamiento.

En el caso del amortiguamiento crítico, de acuerdo con la definición de la frecuencia angular $\omega' = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} = 0$. Evidentemente, en estas condiciones no hay oscilaciones, ya que el período de las mismas sería infinito y el oscilador regresará a la posición de equilibrio sin rebasarla o, a lo más, rebasándola una sola vez.

En el caso del sobreamortiguamiento, de acuerdo con la definición de la frecuencia angular de las oscilaciones amortiguadas, $\omega' = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$, dicha frecuencia ω’ será imaginaria. En estas condiciones es evidente que no habrá oscilaciones, y la partícula regresará a la posición de equilibrio sin rebasarla o rebasándola una vez a lo sumo. Para unas condiciones iniciales dadas (x_0, v_0), cuanto mayor sea el amortiguamiento más tiempo empleará el sistema en quedar en reposo en la posición de equilibrio. En este caso, el movimiento es claramente aperiódico.