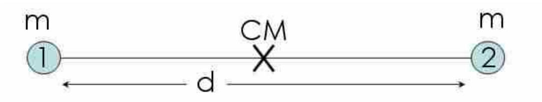
a) Definimos el centro de masas de un sistema de partículas como el punto cuyo vector de posición es:

$$\mathbf{r_{CM}}=\frac{\sum_{i=1}^{N} m_i\mathbf{r_i}}{\sum_{i=1}^{N} m_i}=\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{N} m_i\mathbf{r_i}$$



De acuerdo con su definición (vectorial), la posición del centro de masas debe ser independiente del marco de referencia que utilicemos para localizarlo y depende tan sólo de las masas de las partículas y de las posiciones de unas respecto a otras. Veámoslo con un ejemplo. Supongamos dos masas iguales m separadas por una distancia d. Evidentemente el centro de masas estará situado entre las dos masas y a igual distancia de una que de la otra (d/2). Supongamos que tomamos los ejes con origen en la primera partícula. La posición del centro de masas será (sólo tenemos coordenada x) será:

$$x_{CM}=\frac{\sum_{i=1}^{2} m_i x_i}{m}=\frac{m_1x_1+m_2x_2}{m_1+m_2}=\frac{md}{2m}=\frac{d}{2}$$

Respecto de la primera partícula la posición del centro de masas es a la derecha y a una distancia d/2.

Tomemos ahora unos ejes con origen en la segunda partícula. Operando del mismo modo, pero con este nuevo origen nos queda:

$$x_{CM}=\frac{\sum_{i=1}^{2} m_i x_i}{m}=\frac{m_1x_1+m_2x_2}{m_1+m_2}=\frac{-md}{2m}=-\frac{d}{2}$$

Respecto de la segunda partícula la posición del centro de masas es a la izquierda y a una distancia d/2.

Por último, tomemos unos ejes centrados en el punto medio de la distancia entre las partículas y hagamos lo mismo:

$$x_{CM}=\frac{\sum_{i=1}^{2} m_i x_i}{m}=\frac{m_1x_1+m_2x_2}{m_1+m_2}=\frac{-m\frac{d}{2}+m\frac{d}{2}}{2m}=0$$

El centro de masas coincide con el origen de coordenadas (el punto medio entre las dos masas). Como puede observarse, los tres ejes elegidos conducen siempre al mismo resultado.

b) Dado un sistema de partículas, la cantidad de movimiento de una cualquiera de ellas, en un marco de referencia inercial dado, viene dada por el producto de su masa por su velocidad, esto es:

$$\mathbf{p_i}=m_i\mathbf{v_i}$$

La cantidad de movimiento total **P** del sistema de partículas en un cierto marco de referencia se define simplemente como la suma vectorial de las cantidades de movimiento de las partículas individuales en ese mismo marco, o sea:

$$\mathbf{P}=\sum_{i=1}^{N}\mathbf{p_i}=\sum_{i=1}^{N} m_i\mathbf{v_i}$$

c) En el caso de un sistema de partículas la energía cinética se puede expresar como suma de dos términos, que son:

$$E_C=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i v'^2_i+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i v^2_{CM}=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i v'^2_i+\frac{1}{2}mv^2_{CM}$$

El segundo término es la energía cinética interna, que tan sólo depende del movimiento de las partículas en el sistema de referencia del centro de masas, y que no cambia cuando calculamos la energía cinética total respecto a otro sistema de referencia. La energía cinética interna, al igual que el momento angular interno, tiene carácter intrínseco y sólo puede ser nula cuando todas las velocidades internas sean nulas ($\mathbf{v'}_i$=0), esto es, cuando todas las partículas tengan la misma velocidad que el centro de masas del sistema; entonces, el sistema está realizando un movimiento de traslación pura. Por eso, la parte de la energía cinética asociada al centro de masas recibe el nombre de energía de traslación. Cuando el sistema es un sólido rígido, la energía cinética interna recibe el nombre de energía cinética de rotación.

d) En la expresión de la energía cinética, el primer término es la energía cinética asociada con el movimiento del centro de masas, llamada también energía cinética de traslación del sistema. Es la energía cinética del sistema de partículas si considerásemos que toda la masa del sistema estuviera concentrada en el centro de masas.

e) Obviamente, la energía cinética total de un sistema de partículas es la suma de los dos términos anteriores, la energía cinética del centro de masas y la energía cinética interna. Tiene en cuenta por tanto el movimiento de traslación del centro de masas y el movimiento interno de todas las partículas respecto del centro de masas.