a) Suponemos un sistema de partículas. Para la partícula i-ésima la energía cinética será:

$$E_{Ci}=\frac{1}{2}m_i v_i^2$$

Para todo el sistema de partículas:

$$E_C=\sum_{i=1}^{N}E_{Ci}=\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{2}m_i v_i^2=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}m_i v_i^2$$

El valor de la energía cinética de una partícula y de un sistema de partículas depende del sistema de referencia que utilicemos; la energía cinética referida al centro de masas del sistema (sistema CM) recibe el nombre de energía cinética interna del sistema. La energía total del sistema de partículas puede expresarse en función de la velocidad del centro de masas y de las velocidades internas, sin más que utilizar la relación:

$$\mathbf{v'}_i=\mathbf{v}_i-\mathbf{v}_{CM}=\mathbf{v}_{i/CM}\Rightarrow \mathbf{v}_i=\mathbf{v'}_i+\mathbf{v}_{CM}$$

$$E_C=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}m_i v_i^2=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}m_i(v'_i+v_{CM})^2=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}m_i v'^2_i+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}m_i v_{CM}^2+\sum_{i=1}^{N}m_i v'_i v_{CM}=$$
$$=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}m_i v'^2_i+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}m_i v_{CM}^2+v_{CM}\sum_{i=1}^{N}m_i v'_i$$

El tercer término es nulo, ya que representa la cantidad de movimiento del sistema referida al centro de masas, y ya vimos que en el sistema de referencia centro de masas la cantidad de movimiento es nula. Nos queda:

$$E_C=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}m_i v'^2_i+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}m_i v_{CM}^2+v_{CM}\sum_{i=1}^{N}m_i v'_i=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}m_i v'^2_i+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}m_i v_{CM}^2$$

El primer sumatorio representa la energía cinética interna y el segundo puede escribirse en la forma:

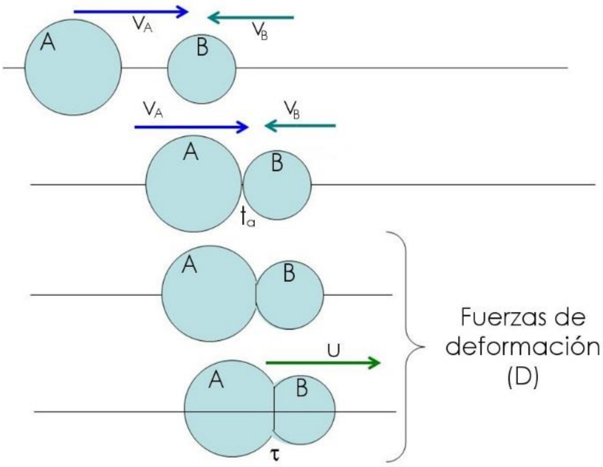
$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}m_i v_{CM}^2=\frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{N}m_i\right)v_{CM}^2=\frac{1}{2}mv_{CM}^2$$

Y nos queda la expresión:

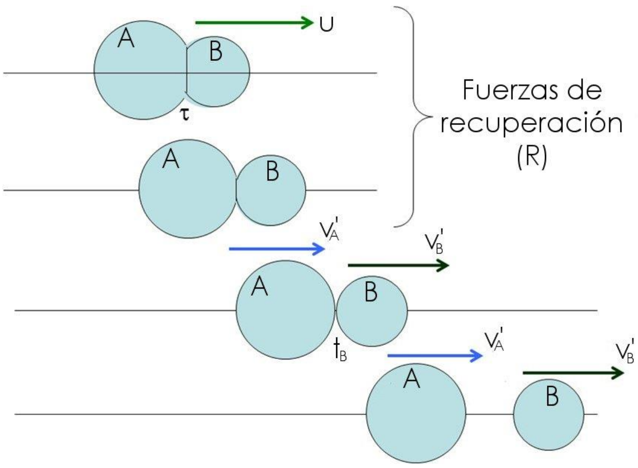
$$E_C=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}m_i v'^2_i+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}m_i v_{CM}^2=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}m_i v'^2_i+\frac{1}{2}mv_{CM}^2$$

La energía cinética total se puede desdoblar en dos partes: una energía cinética asociada con el movimiento del centro de masas, llamada energía cinética de traslación del sistema, y una energía cinética interna que tan sólo depende del movimiento de las partículas en el sistema de referencia del centro de masas, que no cambia cuando calculamos la energía cinética total respecto a otro sistema de referencia. La energía cinética interna, al igual que el momento angular interno, tiene carácter intrínseco y sólo puede ser nula cuando todas las velocidades internas sean nulas ($\mathbf{v'}_i$=0), esto es, cuando todas las partículas tengan la misma velocidad que el centro de masas del sistema; entonces, el sistema está realizando un movimiento de traslación pura. Por eso, la parte de la energía cinética asociada al centro de masas recibe el nombre de energía de traslación.

b) Tenemos dos partículas, A y B, que colisionan frontalmente. Supongamos que las dos esferas, de masas m_A y m_B, se están movimiento inicialmente sobre la recta que une sus centros, con celeridades v_A y v_B, respectivamente, de modo que realizan una colisión frontal; en estas condiciones, después de la colisión los centros de las dos esferas continuarán moviéndose sobre la misma recta. Adoptaremos un convenio de signos sobre dicha recta, que nos exonerará del uso de la notación vectorial. En la figura hemos adoptado como sentido positivo el que va de izquierda a derecha.



Cuando se inicia el contacto entre las dos esferas, en el instante $t=t_a$, la esfera m_A comienza a ejercer una fuerza de deformación D sobre la esfera m_B, y la esfera m_B comienza a ejercer una fuerza –D sobre la esfera m_A (principio de acción reacción). Evidentemente, estas fuerzas actúan a lo largo de la recta que une los centros de las dos esferas y tienden a separarlas. La fuerza D (y –D) no es constante; tiene una intensidad (módulo) nula para $t<t_a$; a partir del instante en que $t=t_a$ va aumentando su intensidad, de una forma más o menos compleja; alcanza su valor máximo en un cierto instante $t=\tau$, cuando es máxima la deformación de las dos esferas y ambas esferas tienen la misma velocidad u (hacia la derecha, hacia la izquierda o nula, dependerá del caso).



A partir de ese instante va disminuyendo la intensidad de la fuerza hasta hacerse nula cuando finalmente, en el instante $t=t_b$, las dos esferas dejen de estar en contacto mutuo. Durante esta segunda parte del movimiento, las fuerzas pasan a ser de recuperación R. En la figura hemos representado la colisión en un diagrama de ocho “instantáneas”; obsérvese que en el instante $t=\tau$ (de máxima deformación) la distancia entre los centros de las esferas es mínima y que ambas esferas se mueven, en ese instante, con una velocidad común que designaremos por u. Finalmente, a partir del instante $t=t_b$, las dos esferas se separan y continúan moviéndose con velocidades respectivas v'_A y v'_B.

Para tiempos $t_a \leq t \leq \tau$, es decir, durante el período de deformación, sobre la partícula B la partícula A ejerce una fuerza deformadora D, y tendremos que el impulso I_B vale:

$$I_B = \int_{t_a}^{\tau} D\,dt = I$$

Del mismo modo y por la tercera ley de Newton (ley de acción reacción) sobre la partícula A la partícula B ejerce esa misma fuerza, pero de sentido contrario y tendremos:

$$I_A = \int_{t_a}^{\tau} -D\,dt = I$$

Teniendo en cuenta que el impulso coincide con la variación de la cantidad de movimiento, en este intervalo de tiempo sobre A tendremos:

$$\Delta p_A=-I=m_Au-m_Av_A$$

Y sobre B:

$$\Delta p_B=I=m_Bu+m_Bv_B$$

De la misma forma, durante el período de restauración o recuperación, es decir, para tiempos $\tau\leq t\leq t_b$, sobre la partícula B la partícula A ejerce una fuerza R cuyo impulso será:

$$I'_B=\int_{\tau}^{t_a} Rdt=I'$$

Y por la ley de acción reacción la partícula B ejerce sobre la partícula A una fuerza igual, pero de sentido contrario, y de impulso:

$$I'_A=\int_{\tau}^{t_a} -Rdt=-I'$$

Del mismo modo que antes, puesto que el impulso coincide con la variación de la cantidad de movimiento, en este tiempo tendremos para las dos partículas:

$$\Delta p'_B=I'=m_Bv'_B-m_Bu$$

$$\Delta p'_A=-I'=m_Av'_A-m_Au$$

c) El coeficiente de restitución es el cociente entre los impulsos de restauración y de deformación. En función de las velocidades queda:

$$e=\frac{v'_A-v'_B}{v_B-v_A}$$

En el caso de un choque elástico el coeficiente de restitución vale 1, y se conservan tanto la cantidad de movimiento como la energía cinética.

En el caso de un choque inelástico el coeficiente de restitución vale 0 y se conserva solo el momento lineal.