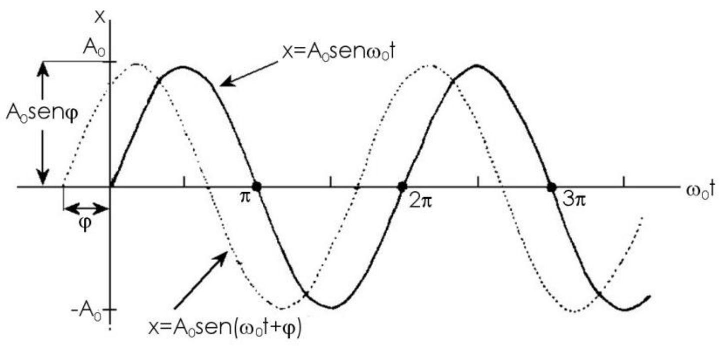
a) La solución del movimiento armónico simple es:

$$x=A_0\mathrm{sen}(\omega_0 t+\varphi)$$

donde $A_0$, $\omega_0$ y $\varphi$ son constantes, dependiendo $A_0$ y $\varphi$ de las condiciones iniciales. La distancia x que separa la partícula del origen recibe el nombre de elongación. Puesto que la función seno puede tomar todos los valores comprendidos entre -1 y +1, los valores de la elongación estarán comprendidos entre $-A_0$ y $+A_0$. La cantidad positiva $A_0$, que corresponde al valor absoluto de la elongación máxima, se denomina amplitud del movimiento armónico simple. La cantidad $(\omega_0 t+\varphi)$ recibe el nombre de fase del movimiento, y por ello la constante $\varphi$ es la constante de fase o fase inicial, esto es, el valor de la fase correspondiente al instante inicial (t=0).




En las gráficas de la figura hemos representado la función $A_0\mathrm{sen}(\omega_0 t+\varphi)$ para distintos valores de la constante de fase $\varphi$. Obsérvese que una constante de fase positiva indica un delante de la forma sinusoidal y que una constante de fase negativa representa un retraso.

El tiempo que transcurre entre dos posiciones análogas (de máximo a máximo, de mínimo a mínimo, etc.) se denomina período. Puesto que la función seno repite sus valores cuando el ángulo aumenta en $2\pi$, la partícula repetirá su elongación cuando la fase del movimiento aumente en $2\pi$ desde su valor en un instante t. Durante el tiempo en que la fase aumenta en $2\pi$ la partícula completa una oscilación o ciclo de su movimiento. Podemos determinar el período T del movimiento teniendo en cuenta que la fase en el instante t+T debe superar en $2\pi$ a la fase en el instante t, esto es:

$$[\omega_0(t+T)+\varphi]-(\omega_0 t+\varphi)=2\pi \Rightarrow \omega_0 t+\omega_0 T+\varphi-\omega_0 t-\varphi=2\pi \Rightarrow \omega_0 T=2\pi \Rightarrow T=2\pi/\omega_0$$

La frecuencia $\nu$ del movimiento es el número de oscilaciones o ciclos que se completan en la unidad de tiempo. Su valor es, obviamente, el recíproco del período:

$$\nu=\frac{1}{T}$$

y se mide en ciclos por segundo o hertzios (Hz). Tanto la frecuencia como el período del M.A.S. son independientes de la amplitud de las oscilaciones.

b) Consideremos una masa m que se mueve bajo la acción conjunta de una fuerza restauradora lineal, F=-kx, y de una fuerza resistiva $f=-\gamma v$. Entonces, la ecuación diferencial del movimiento es:

$$\Sigma F=m\ddot{x} \Rightarrow -kx-\gamma v=m\ddot{x}$$

O sea:

$$-kx-\gamma v=m\ddot{x} \Rightarrow m\ddot{x}+\gamma\dot{x}+kx=0$$

Ecuación que es conveniente escribir en la forma:

$$m\ddot{x}+\gamma\dot{x}+kx=0 \Rightarrow \ddot{x}+2\beta$$

donde $\beta=\frac{\gamma}{2m}$ y $\omega_0=\sqrt{\frac{k}{m}}$ son, respectivamente, el parámetro de amortiguamiento y la frecuencia angular natural del oscilador, esto es, la frecuencia angular de sus oscilaciones en ausencia de amortiguamiento. La ecuación del movimiento es una ecuación diferencial lineal de segundo orden, homogénea (esto es, sin segundo miembro) y de coeficientes constantes. La solución general de esta ecuación diferencial puede obtenerse mediante los métodos normales de resolución de estas ecuaciones diferenciales.

Sin entrar en el detalle de la resolución de la ecuación diferencial del movimiento, diremos que el carácter de su solución depende de los valores de los coeficientes $\beta$ y $\omega_0$. Observemos que $\beta$ (parámetro de amortiguamiento) será tanto mayor cuanto mayor sea el grado de amortiguamiento. De acuerdo con los valores relativos de $\beta$ y $\omega_0$ hemos de distinguir tres casos:

- ✓ $\beta<\omega_0 \rightarrow$ el amortiguamiento es débil.
- ✓ $\beta=\omega_0 \rightarrow$ el amortiguamiento es crítico.
- ✓ $\beta>\omega_0 \rightarrow$ el amortiguamiento es supercrítico.

c) En el caso del amortiguamiento débil la solución de la ecuación diferencial del movimiento es:

$$x=A_0e^{-\beta t}\text{sen}(\omega' t+\varphi)$$

donde $A_0$ y $\varphi$ son dos constantes arbitrarias que se determinaran a partir de las condiciones iniciales y $\omega'$ es la frecuencia angular de las oscilaciones amortiguadas, dada por:

$$\omega'=\sqrt{\omega_0^2-\beta^2}$$

Aunque hemos designado a $\omega'$ con el nombre de frecuencia angular, en un sentido estricto no es posible definir una frecuencia cuando existe amortiguamiento, ya que entonces el movimiento no es periódico; esto es, el oscilador no pasa dos veces por el mismo punto con la misma velocidad (repárese en que la velocidad y la energía total del oscilador van disminuyendo conforme se van completando más y más ciclos). Cuando el amortiguamiento es muy débil, es decir, cuando $\beta<<<\omega_0$, entonces:

$$\omega'=\sqrt{\omega_0^2-\beta^2}\approx\omega_0$$

de modo que podemos llamar frecuencia angular a $\omega'$, aunque esta terminología sólo es absolutamente correcta cuando $\beta=0$. Sin embargo, para simplificar, pasaremos por alto estas consideraciones y nos referiremos a $\omega'$ como a la frecuencia angular de las oscilaciones amortiguadas, frecuencia que siempre será menor que la frecuencia natural del oscilador en ausencia de amortiguamiento. Consideraciones análogas pueden hacerse acerca del periodo de las oscilaciones amortiguadas.

Si el amortiguamiento del oscilador aumenta suficientemente, puede llegar a ser $\beta=\omega_0$ (amortiguamiento crítico); entonces, de acuerdo con la definición de la frecuencia angular $\omega'=\sqrt{\omega_0^2-\beta^2}=0$. Evidentemente, en estas condiciones no hay oscilaciones, ya que el período de las mismas sería infinito y el oscilador regresará a la posición de equilibrio sin rebasarla o, a lo más, rebasándola una sola vez.

El sobreamortiguamiento se presenta cuando el parámetro de amortiguamiento $\beta$ es mayor que la frecuencia angular natural $\omega_0$ del oscilador. Entonces, de acuerdo con la definición de la frecuencia angular de las oscilaciones amortiguadas, $\omega'=\sqrt{\omega_0^2-\beta^2}$, dicha frecuencia $\omega'$ será imaginaria. En estas condiciones es evidente que no habrá oscilaciones, y la partícula regresará a la posición de equilibrio sin rebasarla o rebasándola una vez a lo sumo. Para unas condiciones iniciales dadas ($x_0$, $v_0$), cuanto mayor sea el amortiguamiento más tiempo empleará el sistema en quedar en reposo en la posición de equilibrio.