Siempre que tengamos una ecuación diferencial de la forma $\ddot{x}+cx=0$, en que la aceleración sea proporcional al desplazamiento (y de sentido contrario), estaremos ante un movimiento armónico simple, donde la constante c suele escribirse como ω_0^2. En la ecuación tienen que cumplirse dos condiciones simultáneas:

1) Que tengamos la misma variable derivada dos veces respecto del tiempo y sin derivar. Así, son ecuaciones del movimiento armónico simple $\ddot{x}+\omega_0^2x=0$, $\ddot{y}+\omega_0^2y=0$, $\ddot{z}+\omega_0^2z=0$, e incluso $\ddot{\theta}+\omega_0^2\theta=0$.
2) Que todo lo que acompaña a la variable sin derivar sea constante.

En un movimiento armónico simple, por tanto, la fuerza es directamente proporcional a la elongación y de sentido contrario a ella. En la ecuación la constante ω_0, llamada frecuencia angular o frecuencia natural del M.A.S. queda determinada en función de los valores que posean la masa (m) de la partícula y la constante de fuerza (k) del sistema oscilante.

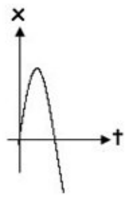
Estas son las dos características esenciales que intervienen en el establecimiento de un movimiento oscilatorio:

1. Una componente inercial, con la que estará asociada la energía cinética del sistema oscilante.
2. Una componente elástica, capaz de almacenar energía potencial (elástica).

La solución de la ecuación diferencial que hemos visto es:

$$x=A_0\text{sen}(\omega_0 t+\varphi)$$

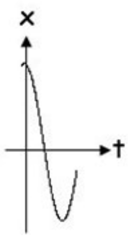
donde A_0, ω_0 y φ son constantes, dependiendo A_0 y φ de las condiciones iniciales. La distancia x que separa la partícula del origen recibe el nombre de elongación. Puesto que la función seno puede tomar todos los valores comprendidos entre -1 y +1, los valores de la elongación estarán comprendidos entre $-A_0$ y $+A_0$. La cantidad positiva A_0, que corresponde al valor absoluto de la elongación máxima, se denomina amplitud del movimiento armónico simple. La cantidad $(\omega_0 t+\varphi)$ recibe el nombre de fase del movimiento, y por ello la constante φ es la constante de fase o fase inicial, esto es, el valor de la fase correspondiente al instante inicial (t=0).



El valor de la constante de fase φ depende de la selección que hagamos del instante inicial. Si escogemos t=0 en el instante en que x=0, la constante de fase valdrá 0 o π, según que la partícula se dirija en ese instante inicial hacia las x positivas o negativas. Entonces, el M.A.S. vendrá descrito por una u otra de las expresiones siguientes:

$$x=A_0\text{sen}\,\omega_0 t$$

$$x=A_0\text{sen}(\omega_0 t+\pi)=-A_0\text{sen}\,\omega_0 t$$



En cambio, si escogemos el instante t=0 cuando $x=A_0$, la constante de fase φ tomará el valor $\frac{\pi}{2}$ y la ecuación del M.A.S. será:

$$x = A_0\text{sen}\left(\omega_0 t + \frac{\pi}{2}\right) = A_0 \cos\omega_0 t$$

En general, cuando la constante de fase φ tiene un valor arbitrario cualquiera, en el instante t=0 la partícula se encontraba en la posición:

$$x_0=A_0\text{sen}\varphi$$

Es fácil comprender que aunque hemos escogido la función seno para describir el M.A.S., igualmente hubiéramos podido escoger la función coseno. Ambas funciones armónicas tienen la misma forma, pero la función coseno está adelantada en $\frac{\pi}{2}$ respecto a la función seno. Así, el M.A.S. puede describirse también por una ecuación de la forma:

$$x=A_0\cos(\omega_0 t+\phi)$$

donde A_0 y ω_0 son las mismas constantes definidas anteriormente. La constante de fase ϕ ha de calcularse ahora de modo que las expresiones $x=A_0\text{sen}(\omega_0 t+\varphi)$ y $x=A_0\cos(\omega_0 t+\phi)$ sean idénticas. Recordemos que para un ángulo θ cualquiera es válida la relación:

$$\cos\theta = \text{sen}\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)$$

de modo que la identidad:

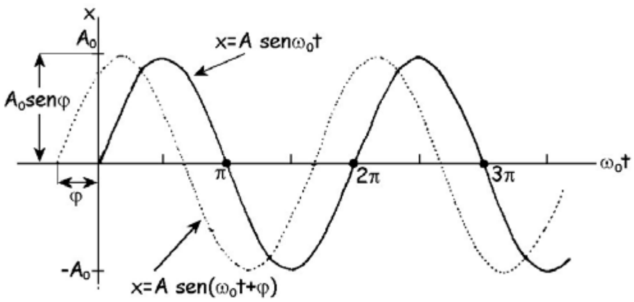
$$A_0\text{sen}(\omega_0 t+\varphi)=A_0\cos(\omega_0 t+\phi)$$

exige que:

$$\text{sen}(\omega_0 t + \varphi) = \cos(\omega_0 t + \phi) \Rightarrow \text{sen}(\omega_0 t + \varphi) = \text{sen}\left(\omega_0 t + \phi + \frac{\pi}{2}\right)$$

Los senos de dos ángulos son iguales si éstos son iguales o difieren en un múltiplo entero de 2π. Tomando la posibilidad más sencilla tenemos:

$$\text{sen}(\omega_0 t + \varphi) = \text{sen}\left(\omega_0 t + \phi + \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \omega_0 t + \varphi = \omega_0 t + \phi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow \varphi = \phi + \frac{\pi}{2}$$



La equivalencia entre las ecuaciones $x=A_0\text{sen}(\omega_0 t+\varphi)$ y $x=A_0\cos(\omega_0 t+\phi)$ nos permiten describir un M.A.S. bien en función del seno o del coseno. Adoptaremos en principio la primera posibilidad.

En las gráficas de la figura hemos representado la función $A_0\text{sen}(\omega_0 t+\varphi)$ para distintos valores de la constante de fase φ. Obsérvese que una constante de fase positiva indica un delante de la forma sinusoidal y que una constante de fase negativa representa un retraso.

El tiempo que transcurre entre dos posiciones análogas (de máximo a máximo, de mínimo a mínimo, etc.) se denomina período. Puesto que la función seno repite sus valores cuando el ángulo aumenta en 2π, la partícula repetirá su elongación cuando la fase del movimiento aumente en 2π desde su valor en un instante t. Durante el tiempo en que la fase aumenta en 2π la partícula completa una oscilación o ciclo de su movimiento. Podemos determinar el período T del movimiento teniendo en cuenta que la fase en el instante t+T debe superar en 2π a la fase en el instante t, esto es:

$$[\omega_0(t+T)+\varphi]- (\omega_0 t+\varphi)=2\pi \Rightarrow \omega_0 t+\omega_0 T+\varphi- \omega_0 t-\varphi=2\pi \Rightarrow \omega_0 T=2\pi \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega_0}$$

La frecuencia ν del movimiento es el número de oscilaciones o ciclos que se completan en la unidad de tiempo. Su valor es, obviamente, el recíproco del período:

$$\nu = \frac{1}{T}$$

y se mide en ciclos por segundo o hertzios (Hz), en honor a Heinrich Hertz (1857-1894), cuyas investigaciones confirmaron experimentalmente la existencia de las ondas electromagnéticas predichas por J. C. Maxwell. Obsérvese que tanto la frecuencia como el período del M.A.S. son independientes de la amplitud de las oscilaciones; esta propiedad se suele enunciar diciendo que las oscilaciones armónicas simples son isócronas, y constituye una característica importante del M.A.S.