

Las posiciones de equilibrio serán aquellas en las que la fuerza es nula, y suponiendo que tenemos un campo de fuerzas conservativo, la fuerza deriva del potencial, luego:

$$\mathbf{F} = -\frac{\partial E_P}{\partial x} \mathbf{i} - \frac{\partial E_P}{\partial y} \mathbf{j} = -(3x^2 - 3)\mathbf{i} - (3y^2 - 12)\mathbf{j}$$

Si la fuerza es nula deberán serlo las dos componentes:

$$\begin{aligned} F_x=0 &\Rightarrow 3x^2-3=0 \Rightarrow x^2=1 \Rightarrow x=\pm 1 \\ F_y=0 &\Rightarrow 3y^2-12=0 \Rightarrow y^2=4 \Rightarrow y=\pm 2 \end{aligned}$$

Los puntos de equilibrio son por tanto:

$$(1, 2), (-1, 2), (1, -2), (-1, -2)$$

Para ver el tipo de equilibrio podemos ir a la curva de potencial. El tipo de equilibrio dependerá de si en dicha curva tenemos un máximo o un mínimo. La condición de máximo o mínimo es que la derivada sea nula, es decir:

$$\frac{dE_P}{d(x, y)} = 3x^2 + 3y^2 - 3 - 12 = 3x^2 + 3y^2 - 15$$

Podemos ver que en cualquiera de los puntos considerados esta función es nula. La diferencia entre máximo y mínimo está en el signo de la segunda derivada. En el punto de que se trate tendremos un máximo si la segunda derivada es negativa, y tendremos un mínimo si la segunda derivada es positiva. La segunda derivada de la función potencial será:

$$\frac{dE_P}{d(x, y)} = 3x^2 + 3y^2 - 15 \Rightarrow \frac{d^2E_P}{d(x, y)^2} = 6x + 6y$$

Veamos el signo de esta función en cada punto:

$$\begin{aligned} (1, 2) &\Rightarrow \frac{d^2E_P}{d(x, y)^2} = 6x + 6y = 6 \cdot 1 + 6 \cdot 2 = 18 > 0 \\ (-1, 2) &\Rightarrow \frac{d^2E_P}{d(x, y)^2} = 6x + 6y = 6(-1) + 6 \cdot 2 = 6 > 0 \\ (1, -2) &\Rightarrow \frac{d^2E_P}{d(x, y)^2} = 6x + 6y = 6 \cdot 1 + 6(-2) = -6 < 0 \\ (-1, -2) &\Rightarrow \frac{d^2E_P}{d(x, y)^2} = 6x + 6y = 6(-1) + 6(-2) = -18 < 0 \end{aligned}$$

Por tanto tendremos los puntos y tipos de equilibrio siguientes:

$$\begin{aligned} (1, 2) &\Rightarrow \text{ESTABLE} \\ (-1, 2) &\Rightarrow \text{ESTABLE} \\ (1, -2) &\Rightarrow \text{INESTABLE} \\ (-1, -2) &\Rightarrow \text{INESTABLE} \end{aligned}$$