

Supongamos en principio que lanzamos el proyectil con una velocidad v_0 que forma un ángulo con el eje X de $(45^\circ + \theta)$. Tendremos entonces que las velocidades iniciales en los dos ejes son:

$$V_{ox} = v_0 \cos(45^\circ + \theta)$$

$$V_{oy} = v_0 \sin(45^\circ + \theta)$$

La posición en función del tiempo viene dada por:

$$x = v_{ox}t = v_0 t \cos(45^\circ + \theta)$$

$$y = v_{oy}t - \frac{1}{2}gt^2$$

puesto que en el eje X el movimiento es uniforme y en el eje Y el movimiento es uniformemente acelerado (aceleración de la gravedad).

El alcance máximo corresponde al valor de x cuando $y=0$ tendremos que:

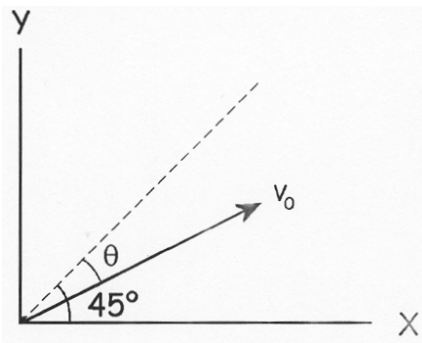
$$0 = v_{oy}t - \frac{1}{2}gt^2 \Rightarrow t = \frac{2v_{oy}}{g} = \frac{2v_0 \sin(45^\circ + \theta)}{g}$$

$$x = \frac{2v_0^2 \cos(45^\circ + \theta) \sin(45^\circ + \theta)}{g} =$$

$$= \frac{2v_0^2}{g} (\cos 45^\circ \cos \theta - \sin 45^\circ \sin \theta)(\sin 45^\circ \cos \theta + \cos 45^\circ \sin \theta) =$$

$$= \frac{2v_0^2}{g} (\cos 45^\circ \cos \theta - \cos 45^\circ \sin \theta)(\cos 45^\circ \cos \theta + \cos 45^\circ \sin \theta)$$

ya que $\sin 45^\circ = \cos 45^\circ$.



Supongamos ahora que el ángulo que forma la velocidad inicial con el eje X es de $(45^\circ - \theta)$. Haciendo del mismo modo que en el caso anterior tendremos:

$$v_{ox} = v_0 \cos(45^\circ - \theta)$$

$$v_{oy} = v_0 \sin(45^\circ - \theta)$$

$$x = v_{ox}t = v_0 t \cos(45^\circ - \theta)$$

$$y = v_{oy}t - \frac{1}{2}gt^2$$

Para determinar el alcance máximo:

$$0 = v_{oy}t - \frac{1}{2}gt^2 \Rightarrow t = \frac{2v_{oy}}{g} = \frac{2v_0 \sin(45^\circ - \theta)}{g}$$

$$x = \frac{2v_0^2 \cos(45^\circ - \theta) \sin(45^\circ - \theta)}{g} =$$

$$\begin{aligned} &= \frac{2v_0^2}{g} (\cos 45^\circ \cos \theta + \sin 45^\circ \sin \theta)(\sin 45^\circ \cos \theta - \cos 45^\circ \sin \theta) = \\ &= \frac{2v_0^2}{g} (\cos 45^\circ \cos \theta + \cos 45^\circ \sin \theta)(\cos 45^\circ \cos \theta - \cos 45^\circ \sin \theta) \end{aligned}$$

Vemos que la expresión del alcance es exactamente la misma, como queríamos demostrar.