a) En un campo de fuerzas conservativas la fuerza es la derivada de la energía potencial cambiada de signo luego valdrá:

$$F_x = -\frac{dU}{dx} = \frac{d}{dx}\left[b\left(\frac{1}{a+x}+\frac{1}{a-x}\right)\right] = b\left[-\frac{1}{(a+x)^2}+\frac{1}{(a-x)^2}\right] = b\left[\frac{1}{(a-x)^2}-\frac{1}{(a+x)^2}\right] =$$

$$= b\left[\frac{(a+x)^2-(a-x)^2}{(a-x)^2(a+x)^2}\right] = b\frac{a^2+x^2+2ax-a^2-x^2+2ax}{(a^2-x^2)^2} = \frac{4abx}{(a^2-x^2)^2}$$

$$\underline{F_x = \frac{4abx}{(a^2-x^2)^2}}$$

b) Ahora nos piden cuándo la fuerza es cero luego tendremos:

$$F_x = 0 \Rightarrow \frac{4abx}{(a^2-x^2)^2} = 0 \Rightarrow 4abx = 0 \Rightarrow x = 0$$

$$\underline{x=0}$$

c) Para saber si el equilibrio es estable o inestable tenemos que saber si la partícula se encuentra en un mínimo o en un máximo de la curva de energía potencial, para lo cual necesitamos conocer el signo de la segunda derivada de la energía potencial. Así pues derivamos dos veces la energía potencial. La primera derivada ya la tenemos puesto que no hay más que cambiar el signo de la fuerza:

$$F_x = -\frac{dU}{dx} \Rightarrow U' = \frac{dU}{dx} = -F_x = -\frac{4abx}{(a^2-x^2)^2}$$

Volvemos a derivar de nuevo:

$$U'' = \frac{d^2U}{dx^2} = -\frac{4ab(a^2-x^2)^2 - 4abx2(a^2-x^2)(-2x)}{(a^2-x^2)^4} = -\frac{4ab(a^2-x^2)^2 + 16abx^2(a^2-x^2)}{(a^2-x^2)^4}$$

En la posición de equilibrio:

$$U''(x=0) = -\frac{4ab(a^2)^2}{(a^2)^4} = -\frac{4a^5b}{a^8} = -\frac{4b}{a^3} < 0 \Rightarrow \text{Máximo U}$$

La partícula se encuentra en un máximo de la curva de energía potencial, luego el equilibrio es inestable.

<u>EQUILIBRIO INESTABLE</u>