La ecuación que describe un movimiento armónico simple es:

$$x=A\cos(\omega t+\varphi)$$

donde las constantes de la ecuación serán la amplitud A y el ángulo de fase φ. La ecuación correspondiente a la velocidad en un movimiento armónico simple será, derivando respecto del tiempo:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = -\omega A \mathrm{sen}(\omega t + \varphi)$$

Supongamos por tanto que conocemos las condiciones iniciales del movimiento, es decir, la posición y la velocidad en t=0, que denotaremos como x_0 y v_{0x}. Sustituimos estos dos parámetros en las ecuaciones correspondientes y nos queda:

$$x_0=A\cos\varphi$$
$$v_{0x}=-\omega A\mathrm{sen}\varphi$$

Dividiendo la segunda ecuación entre la primera tendremos:

$$\frac{v_{0x}}{x_0} = -\omega \mathrm{tg}\varphi \Rightarrow \mathrm{tg}\varphi = \frac{v_{0x}}{\omega x_0} \Rightarrow \varphi = \mathrm{arctg}\left(-\frac{v_{0x}}{\omega x_0}\right)$$

$$\underline{\varphi = \mathrm{arctg}\left(-\frac{v_{0x}}{\omega x_0}\right)}$$

Para determinar la amplitud elevamos al cuadrado las ecuaciones correspondientes a la posición inicial y a la velocidad inicial:

$$x_0 = A\cos\varphi \Rightarrow x_0^2 = A^2\cos^2\varphi$$
$$v_{0x} = -\omega A\mathrm{sen}\varphi \Rightarrow v_{0x}^2 = \omega^2 A^2 \mathrm{sen}^2\varphi \Rightarrow \frac{v_{0x}^2}{\omega^2} = A^2\mathrm{sen}^2\varphi$$

Por último sumamos las dos expresiones que hemos obtenido:

$$x_0^2 + \frac{v_{0x}^2}{\omega^2} = A^2\cos^2\varphi + A^2\mathrm{sen}^2\varphi \Rightarrow x_0^2 + \frac{v_{0x}^2}{\omega^2} = A^2(\cos^2\varphi + \mathrm{sen}^2\varphi)$$
$$x_0^2 + \frac{v_{0x}^2}{\omega^2} = A^2 \Rightarrow A = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_{0x}^2}{\omega^2}}$$

$$\underline{A = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_{0x}^2}{\omega^2}}}$$