a) La energía de un oscilador amortiguado disminuye con el tiempo debido a la fuerza disipativa. En cualquier instante se puede agregar energía al sistema aplicando una fuerza que actúe en la dirección del movimiento del oscilador. Un ejemplo común de oscilador amortiguado forzado es un oscilador amortiguado impulsado por una fuerza externa que varía sinusoidalmente con el tiempo como $F=F_0$ sen ωt, donde ω es la frecuencia angular de la fuerza y F_0 una constante.

Cuando un sistema amortiguado oscila forzado por la acción de dicha fuerza el movimiento del oscilador responde a la ecuación:

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m}\,\mathrm{sen}\,\omega t$$

La solución de esa ecuación es la suma de dos términos uno complementario que corresponde a la solución de la ecuación homogenea (cuando F=0) y que tiene carácter transitorio y otro que es una solución particular que satisface a la ecuación completa es de la forma $A\mathrm{sen}(\omega t-\delta)$ y tiene carácter estacionario.

Por lo tanto, dependiendo del tipo de amortiguamiento el desplazamiento viene dado por:

$$x=A_o e^{-\beta t}\mathrm{sen}\,(\omega' t+\varphi)+ A\mathrm{sen}(\omega t-\delta) \text{ cuando } \beta<\omega_0$$

$$x=(A_o+A_1)\, e^{-\beta t}+ A\mathrm{sen}(\omega t-\delta) \text{ cuando } \beta=\omega_0$$

$$x=(A_o\, e^{-\omega_1 t} +A_1\, e^{-\omega_2 t}) + A\mathrm{sen}(\omega t-\delta) \text{ cuando } \beta>\omega_0$$

Tras un período suficientemente largo, cuando la energía de entrada en cada ciclo es igual a la energía perdida en cada ciclo se alcanza el estado estacionario el sistema termina oscilando con una frecuencia igual a la de la fuerza impulsora y con una amplitud constante que depende de esta frecuencia.

$$x= A\mathrm{sen}(\omega t-\delta)$$

Donde la amplitud:

$$A = \frac{F_0 / m}{\sqrt{\left(\omega^2 - \omega_0^2\right)^2 + \left(2\beta\omega\right)^2}}$$

y la constante de fase:

$$\mathrm{tg}\delta = \frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

La velocidad del oscilador será:

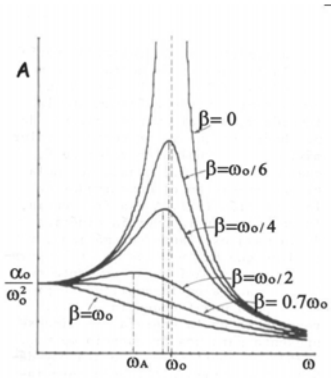
$$v=A\omega\cos(\omega t-\delta)$$

La amplitud de la velocidad o velocidad máxima es: $v_{máx}= A\omega$

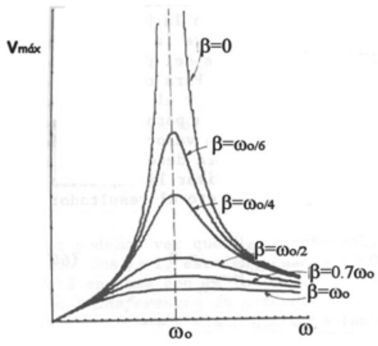
$$v_{máx} = \frac{F_0 / m}{\sqrt{\left(\omega^2 - \omega_0^2\right)^2 + \left(2\beta\omega\right)^2}}\,\omega$$

Tanto la amplitud (A) como la velocidad máxima ($v_{máx}$) varían con la frecuencia de la fuerza impulsora (ω) para distintos amortiguamientos (β) como podemos ver en las figuras siguientes.

b) En el estado estacionario la masa oscila con la frecuencia de la fuerza impulsora y con una amplitud que depende de esa frecuencia.



En las gráficas podemos ver la amplitud y la velocidad máxima en función de la frecuencia para un oscilador forzado para distintos amortiguamientos. Para un amortiguamiento pequeño, la amplitud en función de la frecuencia de la fuerza impulsora pasa por un máximo para $\omega=\omega_A$. El aumento tan significativo de la amplitud para ω_A se conoce como resonancia en amplitud, y la frecuencia ω_A se llama frecuencia de resonancia. La razón de las oscilaciones de gran amplitud en la frecuencia de resonancia es que la energía se transfiere al sistema en las condiciones más favorables. En la resonancia, la fuerza aplicada se encuentra en fase con la velocidad y la potencia transferida al oscilador es máxima. La resonancia en velocidad siempre se produce para $\omega=\omega_0$.



La amplitud y la velocidad máxima aumentan al disminuir el amortiguamiento, y la curva de resonancia se ensancha al aumentar el amortiguamiento. En ausencia de fuerzas de amortiguamiento ($\beta=0$) la amplitud del estado estacionario se acerca al infinito cuando $\omega\rightarrow\omega_0$. En otras palabras, si no hay pérdidas en el sistema y continuamos impulsando un oscilador inicialmente en reposo con una fuerza sinusoidal de frecuencia $\omega=\omega_0$ que se encuentra en fase con la velocidad la amplitud crecerá sin límite. Esto no ocurre en la práctica, ya que siempre se encuentran presentes fuerzas disipativas, por muy pequeñas que sean. Esto quiere decir que en la resonancia la amplitud será grande pero finita para amortiguamientos pequeños.

La Potencia transferida es P=Fv luego la resonancia en transferencia de potencia se produce cuando hay resonancia en velocidad y lo mismo pasa en la resonancia en energía cinética. Sin embargo la resonancia en energía potencial se produce cuando hay resonancia en amplitud. Salvo cuando $\beta\rightarrow 0$, la resonancia en amplitud ω_A y en velocidad ω_0 no coinciden sino que $\omega_A < \omega_0$

c) Solamente se puede hablar de resonancia en amplitud en el caso de amortiguamiento débil. Como vemos las curvas que aparecen en la gráfica anterior para distintos valores de amortiguamiento, presentan máximos de amplitud para determinada frecuencia de la fuerza impulsora. Esa frecuencia que es la frecuencia de resonancia en amplitud viene dada por:

$$\omega_A = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}$$

Cuanto menor es el amortiguamiento más pronunciado es el máximo de amplitud y más se aproxima la frecuencia de resonancia ω_A a la frecuencia natural ω_0 del oscilador. No habrá resonancia en amplitud cuando $\omega_0^2 \leq 2\beta^2$ es decir con excesivo amortiguamiento puesto que en ese caso ω_A seria cero o imaginaria. La función A(ω) no presenta máximo sino que la amplitud decrece continuamente al aumentar ω.