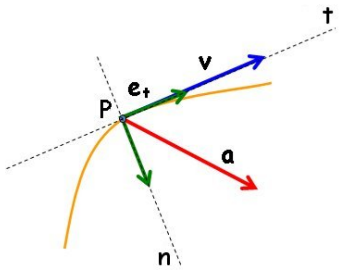


Cambiemos ahora de ejes, y consideremos un nuevo sistema de referencia, el intrínseco. Los nuevos ejes serán, uno el tangencial, tangente a la trayectoria y sentido positivo el de avance del móvil (es decir, coincidente con la velocidad), y otro el normal, perpendicular al tangencial y sentido positivo hacia la concavidad. Consideremos en general una partícula que se mueve en una trayectoria (amarilla). En un instante t, dicha partícula se encuentra en el punto P, y tiene una velocidad **v** (azul) y una aceleración **a** (roja). Puesto que la velocidad es tangente a la trayectoria, la podemos escribir como:

$$\mathbf{v}=\mathrm{v}\mathbf{e_t}$$

siendo $\mathbf{e_t}$ un versor tangente a la trayectoria en el punto P. Para obtener la aceleración derivamos esa expresión respecto del tiempo, pero tenemos que tener en cuenta que el vector $\mathbf{e_t}$ es constante en módulo (la unidad) pero no en dirección y sentido, ya que es tangente a la trayectoria y modifica su dirección a la par que lo hace la velocidad. Así, derivaremos un producto:

$$\mathbf{a}=\frac{d\mathbf{v}}{dt}=\frac{dv}{dt}\mathbf{e_t}+v\frac{d\mathbf{e_t}}{dt}$$

En esta expresión necesitamos conocer cuánto vale la derivada del vector unitario $\mathbf{e_t}$. Para ello empezamos haciendo el producto escalar de este vector por sí mismo:

$$\mathbf{e_t}\cdot\mathbf{e_t}=e_t\cdot e_t\cos\alpha$$

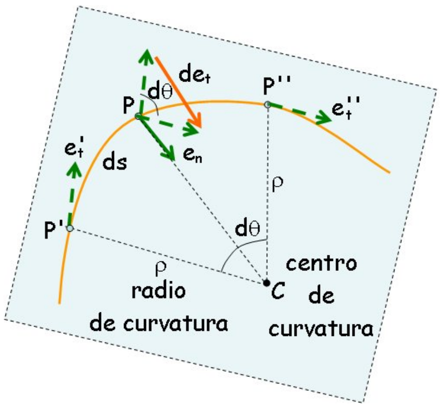
siendo α el ángulo que forman los dos vectores implicados, que obviamente es cero puesto que se trata del mismo vector. Así, nos queda:

$$\mathbf{e_t}\cdot\mathbf{e_t}=e_t\cdot e_t\cos\alpha=1\cdot 1\cdot\cos 0^\circ=1\Rightarrow\mathbf{e_t}\cdot\mathbf{e_t}=1$$

Derivamos esta expresión respecto del tiempo:

$$\mathbf{e_t}\cdot\mathbf{e_t}=1\Rightarrow\frac{d\mathbf{e_t}}{dt}\cdot\mathbf{e_t}+\mathbf{e_t}\cdot\frac{d\mathbf{e_t}}{dt}=0\Rightarrow 2\mathbf{e_t}\cdot\frac{d\mathbf{e_t}}{dt}=0\Rightarrow\mathbf{e_t}\cdot\frac{d\mathbf{e_t}}{dt}=0$$

Si el producto escalar de estos dos vectores es nulo (y ninguno de los vectores lo es) es porque el ángulo que forman entre ellos es de 90º, es decir, son dos vectores perpendiculares:



$$\mathbf{e_t}\cdot\frac{d\mathbf{e_t}}{dt}=0\Rightarrow\mathbf{e_t}\perp\frac{d\mathbf{e_t}}{dt}$$

La dirección perpendicular a la tangente es la normal, luego ya sabemos que la dirección del vector $\frac{d\mathbf{e_t}}{dt}$ es la normal. Para ver el sentido, vamos a ver cómo varía este vector $\mathbf{e_t}$. Dibujamos la posición de la partícula en tres instantes de tiempo, y el vector $\mathbf{e_t}$ en esas tres posiciones será tangente a la trayectoria. Para ver el sentido de $d\mathbf{e_t}$ dibujamos en el punto P los vectores equipolentes a $\mathbf{e'_t}$ y $\mathbf{e''_t}$, y vemos su diferencia, que será $d\mathbf{e_t}$. Así, podemos ver que el sentido de $\frac{d\mathbf{e_t}}{dt}$ es hacia la concavidad. Por tanto, el vector $\frac{d\mathbf{e_t}}{dt}$ tiene la dirección normal y apuntando hacia el centro de curvatura (sentido positivo):

$$\frac{d\mathbf{e_t}}{dt} \,||\, \mathbf{e_n}$$

Nos falta ver cuánto vale este vector en módulo. El triángulo formado en el punto P es prácticamente rectángulo, ya que el ángulo dθ es muy pequeño, de modo que los otros dos son casi de 90º (es isósceles, dos de los lados son vectores unitarios). Podemos poner entonces:

$$|d\mathbf{e_t}|=|\mathbf{e_t}|\mathrm{sen}d\theta$$

Y para ángulos muy pequeños el seno es aproximadamente igual al ángulo:

$$|d\mathbf{e_t}|=|\mathbf{e_t}|\mathrm{sen}d\theta \Rightarrow |d\mathbf{e_t}|=d\theta$$

Por otro lado, teniendo en cuenta que el arco es igual al radio por el ángulo:

$$ds=\rho d\theta \Rightarrow d\theta = \frac{ds}{\rho}$$

Así, sustituyendo:

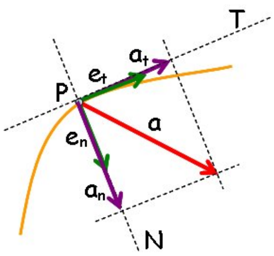
$$|d\mathbf{e_t}|=d\theta \Rightarrow |d\mathbf{e_t}| = \frac{ds}{\rho} \Rightarrow \left|\frac{d\mathbf{e_t}}{dt}\right| = \frac{1}{\rho}\frac{ds}{dt} = \frac{v}{\rho}$$

Puesto que sabemos que la dirección es la de la normal:

$$\frac{d\mathbf{e_t}}{dt} = \left|\frac{d\mathbf{e_t}}{dt}\right|\mathbf{e_n} = \frac{v}{\rho}\mathbf{e_n}$$

Y ya podemos sustituir en la expresión de la aceleración:

$$\mathbf{a} = \frac{dv}{dt}\mathbf{e_t} + v\frac{d\mathbf{e_t}}{dt} = \frac{dv}{dt}\mathbf{e_t} + v\frac{v}{\rho}\mathbf{e_n} = \frac{dv}{dt}\mathbf{e_t} + \frac{v^2}{\rho}\mathbf{e_n}$$



Así, vemos que mientras que el vector velocidad es tangente a la trayectoria, el vector aceleración puede descomponerse en dos componentes, llamadas componentes intrínsecas, mutuamente perpendiculares: una componente tangencial $\mathbf{a_t}$, en dirección tangente a la trayectoria, llamada aceleración tangencial, y una componente normal $\mathbf{a_n}$, en dirección normal principal a la trayectoria llamada aceleración normal o centrípeta. Los valores de estas componentes son:

$$a_t = \frac{dv}{dt}$$

$$a_n = \frac{v^2}{\rho}$$

Y el módulo de la aceleración, puesto que son dos componentes perpendiculares:

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2}$$

Cada una de estas dos componentes tiene un significado físico concreto. Cuando la partícula se mueve, su celeridad puede cambiar, y este cambio lo mide la aceleración tangencial, que nos da la variación del módulo de la velocidad en el tiempo. Si además la trayectoria es curva, cambia también la dirección de la velocidad, y este cambio lo mide la aceleración normal.

Si tenemos un movimiento curvilíneo con celeridad constante (v=cte), la aceleración tangencial será nula, pero habrá aceleración normal, de modo que en un movimiento curvilíneo siempre existirá aceleración. Si además el movimiento es circular, el radio de curvatura R es constante y la aceleración normal se escribe $a_n = \frac{v^2}{R}$ como se ha visto ya en cursos más básicos de Física.

Si la trayectoria es rectilínea, podemos considerar que el radio de curvatura es infinito, de modo que la aceleración normal es nula, cosa lógica puesto que en un movimiento rectilíneo no hay cambio en la dirección de la velocidad. En cuanto a la aceleración tangencial, será nula o no en función de que la celeridad sea o no constante, y tendremos entonces movimiento rectilíneo uniforme o acelerado.