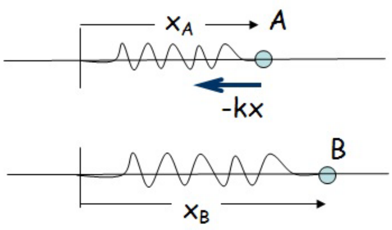
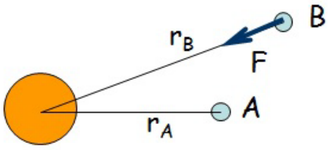


La energía potencial sólo tiene sentido en sistemas de fuerzas conservativas. Existen muchas situaciones físicas en las que el trabajo efectuado sobre una partícula es independiente de la trayectoria seguida por esta y sólo depende de las posiciones inicial y final. Algunos ejemplos de ello son la fuerza de recuperación elástica:

$$W(A \to B) = \frac{1}{2}kx_A^2 - \frac{1}{2}kx_B^2$$

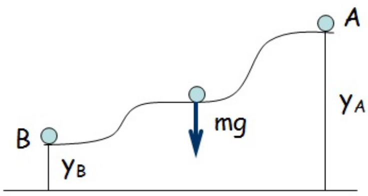


La fuerza de atracción gravitatoria:

$$W(A \to B) = -G\frac{Mm}{r_A} - \left(-G\frac{Mm}{r_B}\right)$$

O la fuerza peso, que es un caso particular de la fuerza de atracción gravitatoria:

$$W(A\to B)=mgy_A-mgy_B$$



En todos estos casos podemos expresar dicho trabajo como la diferencia de valores que toma cierta función escalar en los extremos de dicha trayectoria; esta función recibe el nombre de energía potencial y la designaremos por U, de modo que:

$$W(A \to B) = \int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = U(\mathbf{r_A}) - U(\mathbf{r_B}) = -[U(\mathbf{r_B}) - U(\mathbf{r_A})] = -\Delta U$$

donde físicamente el signo negativo indicará que el trabajo realizado por la fuerza representa una disminución de energía potencial, es decir, de su capacidad para realizar más trabajo. Evidentemente, la energía potencial tiene las mismas dimensiones que el trabajo y se medirá en las mismas unidades que éste. En definitiva, podemos dar la definición siguiente:

"La energía potencial de una partícula en un campo (al cual es sensible) es una función escalar de las coordenadas de la posición que ocupa, de tal modo que el trabajo realizado por el campo en un desplazamiento de la partícula es igual a la diferencia de valores de la energía potencial en la posición inicial y en la posición final".

En este tipo de situaciones en que el trabajo depende sólo de las posiciones inicial y final, consideremos dos puntos muy próximos y calculemos el trabajo elemental efectuado por una fuerza entre ellos: A(x,y,z), A'(x+dx, y+dy, z+dz):

$$dW=U(x, y, z)-U(x+dx, y+dy, z+dz)=-dU(x, y, z)$$

Así, teniendo en cuenta que:

$$dW=F_xdx+Fdy+F_zdz=-dU(x, y, z)= -\left(\frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy + \frac{\partial U}{\partial z}dz\right)$$

Y por tanto podemos escribir:

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x}; \quad F_y = -\frac{\partial U}{\partial y}; \quad F_z = -\frac{\partial U}{\partial z}$$

$$\mathbf{F} = F_x\mathbf{i} + F_y\mathbf{j} + F_z\mathbf{k} = -\frac{\partial U}{\partial x}\mathbf{i} - \frac{\partial U}{\partial y}\mathbf{j} - \frac{\partial U}{\partial z}\mathbf{k} = -\left(\frac{\partial U}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\mathbf{k}\right)$$

Según esto, la fuerza es igual a la derivada de la energía potencial en la dirección del desplazamiento, cambiada de signo. Esto es lo que se llama derivada direccional de U. Cuando un vector es tal que su componente en una dirección cualquiera se puede expresar como la derivada direccional de una función escalar de punto en esa dirección, el vector se llama gradiente de esa función. De ese modo podemos decir que F es el gradiente con signo negativo de la función U, esto es:

$$F=-\text{grad}U$$