

a) La cantidad de movimiento de una partícula es una magnitud física definida como el producto de la masa de la partícula por su velocidad. Designándola por \mathbf{p} tenemos:

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v}$$

La cantidad de movimiento es una magnitud física vectorial, que tiene la misma dirección y sentido que la velocidad y, como ésta, depende del marco de referencia del observador.

Para una partícula de masa m sometida a una fuerza \mathbf{F} (que puede variar tanto en módulo como en dirección), el efecto de dicha fuerza es producir un cambio en la cantidad de movimiento de la partícula. Dicho cambio viene expresado por la segunda ley de Newton:

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt}$$

Podemos escribir esta ecuación también en la forma:

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} \Rightarrow \mathbf{F}dt = d\mathbf{p}$$

que nos expresa el cambio elemental de la cantidad de movimiento durante un intervalo de tiempo infinitesimal. Podemos obtener el cambio en la cantidad de movimiento de la partícula durante un intervalo de tiempo finito, $\Delta t = t_f - t_i$ bajo la acción de la fuerza resultante \mathbf{F} integrando:

$$\mathbf{F}dt = d\mathbf{p} \Rightarrow \int_{t_i}^{t_f} \mathbf{F}dt = \int_{\mathbf{p}_i}^{\mathbf{p}_f} d\mathbf{p}$$

La integral del primer miembro recibe el nombre de impulso de la fuerza \mathbf{F} durante el intervalo de tiempo $\Delta t = t_f - t_i$ y es, evidentemente, una magnitud vectorial que denotaremos por \mathbf{I} :

$$\mathbf{I} = \int_{t_i}^{t_f} \mathbf{F}dt = \int_{\mathbf{p}_i}^{\mathbf{p}_f} d\mathbf{p} = \mathbf{p}_f - \mathbf{p}_i = \Delta\mathbf{p} \Rightarrow \mathbf{I} = \Delta\mathbf{p}$$

El impulso de la fuerza resultante que actúa sobre una partícula es igual a la variación de la cantidad de movimiento de la partícula.

b) El momento angular o cinético con respecto a un punto arbitrario O de una partícula de masa m y velocidad \mathbf{v} se define como el producto vectorial:

$$\mathbf{L}_O = \mathbf{r} \times m\mathbf{v} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$$

donde \mathbf{r} es el vector de posición de la partícula con respecto al punto O ($\mathbf{r} = \mathbf{OP}$). El momento angular es un vector perpendicular al plano definido por el punto arbitrario (O) elegido como origen de momentos y la recta directriz de la cantidad de movimiento de la partícula, su sentido es el determinado por la regla de la mano derecha o del tornillo para el producto vectorial y su módulo viene dado por:

$$L_O = rpsen\phi = pd$$

donde d es el llamado brazo de la cantidad de movimiento con respecto al punto O elegido y representa la distancia de dicho punto a la recta directriz del vector \mathbf{p} .

En el caso de que la partícula describa una trayectoria plana, al tomar como origen de momentos un punto cualquiera del plano de la trayectoria y teniendo en cuenta que en coordenadas polares:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_r + \mathbf{v}_\theta$$

tendremos que:

$$\mathbf{L}_O = \mathbf{r} \times m\mathbf{v} = \mathbf{r} \times m(\mathbf{v}_r + \mathbf{v}_\theta) = \mathbf{r} \times (m\mathbf{v}_r + m\mathbf{v}_\theta) = \mathbf{r} \times m\mathbf{v}_r + \mathbf{r} \times m\mathbf{v}_\theta = \mathbf{r} \times m\mathbf{v}_\theta$$

siendo nulo el producto $\mathbf{r} \times m\mathbf{v}_r$ por ser \mathbf{r} y \mathbf{v}_r dos vectores paralelos. Nos queda pues:

$$\mathbf{L}_0 = \mathbf{r} \times m\mathbf{v}_\theta \Rightarrow L_0 = rmv_\theta = rmr\dot{\theta} = mr^2 \frac{d\theta}{dt} = mr^2\omega$$

Derivando la expresión del momento angular:

$$\frac{d\mathbf{L}_0}{dt} = \frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times m\mathbf{v}) = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \times m\mathbf{v} + \mathbf{r} \times \frac{d}{dt}(m\mathbf{v}) = \mathbf{v} \times m\mathbf{v} + \mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} = \mathbf{M}_0$$

siendo nulo el producto $\mathbf{v} \times m\mathbf{v}$ por tratarse de dos vectores paralelos. De este modo hemos establecido una relación importante entre el momento angular de la partícula y el momento de la fuerza que sobre ella actúa:

$$\mathbf{M}_0 = \frac{d\mathbf{L}_0}{dt}$$

Así tenemos que la suma de los momentos con respecto a O de las fuerzas que actúan sobre la partícula es igual a la razón del cambio del momento de la cantidad de movimiento de la partícula alrededor de O. Por tanto, si el momento aplicado a una partícula es cero, o sea, si $\mathbf{M}_0 = \mathbf{r} \times \mathbf{F} = 0$ tendremos que $\mathbf{M}_0 = \frac{d\mathbf{L}_0}{dt} = 0$, de modo que el momento angular de la partícula permanecerá constante a lo largo del tiempo.