En el punto de máxima altura la componente y de la velocidad es nula, luego tendremos:

$$v_y = v_{0y} - gt \Rightarrow 0 = v_0 \cos\theta - gt \Rightarrow t = \frac{v_0 \cos\theta}{g}$$

En este punto la altura es h:

$$y = y_0 + v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2 \Rightarrow h = v_0 \cos\theta \frac{v_0 \cos\theta}{g} - \frac{1}{2}g\frac{v_0^2 \cos^2\theta}{g^2} \Rightarrow h = \frac{v_0^2 \cos^2\theta}{g} - \frac{1}{2}\frac{v_0^2 \cos^2\theta}{g} = \frac{v_0^2 \cos^2\theta}{2g}$$

En el punto de máxima altura el alcance es $\frac{R}{2}$. En el eje X el movimiento es rectilíneo y uniforme, luego:

$$v_x = \frac{x}{t} \Rightarrow v_0 \mathrm{sen}\theta = \frac{\frac{R}{2}}{\frac{v_0 \cos\theta}{g}} \Rightarrow v_0 \mathrm{sen}\theta = \frac{Rg}{2v_0 \cos\theta} \Rightarrow R = \frac{2v_0^2 \mathrm{sen}\theta \cos\theta}{g}$$

Ahora, el observador mide el ángulo de elevación ϕ, que será:

$$\mathrm{tg}\phi = \frac{h}{\frac{R}{2}} = \frac{2h}{R} = \frac{2\frac{v_0^2 \cos^2\theta}{2g}}{\frac{2v_0^2 \mathrm{sen}\theta \cos\theta}{g}} = \frac{\cos\theta}{2\mathrm{sen}\theta} = \frac{1}{2\mathrm{tg}\theta}$$

$$\underline{\mathrm{tg}\phi = \frac{1}{2\mathrm{tg}\theta}}$$