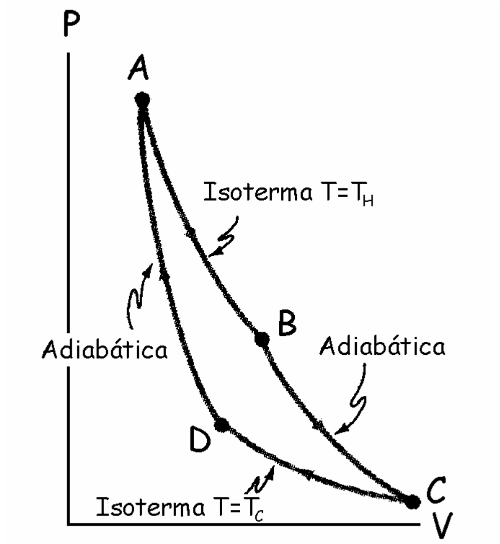

Un ciclo de Carnot es el formado por dos transformaciones isotermas y dos adiabáticas reversibles, tal como se muestra en la figura. Consta por tanto de los siguientes pasos:

1) el gas se expande isotérmicamente a temperatura T_H absorbiendo calor Q_H (AB);
2) el gas se expande adiabáticamente hasta que su temperatura baja a T_C (BC);
3) el gas se comprime isotérmicamente a temperatura T_C rechazando calor $|Q_C|$ (CD); 4) el gas se comprime adiabáticamente hasta su estado inicial a temperatura T_H (DA).

Podemos calcular el rendimiento de un ciclo de Carnot en el que la sustancia de trabajo sea un gas ideal, como el cociente entre el trabajo realizado en el ciclo dividido entre el calor absorbido. Comencemos determinando el trabajo realizado en el ciclo. En el ciclo completo la variación de energía interna debe ser nula, de modo que:

$$\Delta U=0$$

Por el primer principio:

$$\Delta U=\Delta Q-\Delta W \Rightarrow 0=\Delta Q-\Delta W \Rightarrow \Delta W=\Delta Q$$

Como dos de las etapas del ciclo son adiabáticas (variación de calor nulas) sólo tendremos que determinar la variación de calor en las isotermas. En la transformación AB, aplicando el primer principio:

$$\Delta U_{AB}=\Delta Q_{AB}-\Delta W_{AB} \Rightarrow \Delta Q_{AB}=\Delta U_{AB}+\Delta W_{AB}$$

La variación de energía interna en la isoterma es nula, de modo que podemos poner:

$$\Delta Q_{AB}=\Delta U_{AB}+\Delta W_{AB}=\Delta W_{AB}$$

La variación de trabajo será:

$$\Delta W_{AB} = \int PdV = \int_{V_A}^{V_B} \frac{nRT_H}{V} dV = nRT_H \int_{V_A}^{V_B} \frac{dV}{V} = nRT_H \ln V\Big]_{V_A}^{V_B} = nRT_H (\ln V_B - \ln V_A) =$$
$$= nRT_H \ln \frac{V_B}{V_A}$$

Podemos hacer exactamente lo mismo en la otra etapa isoterma, que es la transformación CD. Obtendremos pues:

$$\Delta W_{CD} = nRT_C \ln \frac{V_D}{V_C}$$

Entonces ya tenemos la variación de trabajo:

$$\Delta W = \Delta Q = \Delta Q_{AB} + \Delta Q_{CD} = nRT_H \ln \frac{V_B}{V_A} + nRT_C \ln \frac{V_D}{V_C}$$

Y el calor absorbido es el de la transformación AB:

$$\Delta Q_{AB} = nRT_H \ln \frac{V_B}{V_A}$$

Además, en las transformaciones adiabáticas se cumplirá que:

$$TV^{\gamma-1}=cte$$

De modo que para la transformación BC:

$$T_B V_B^{\gamma-1} = T_C V_C^{\gamma-1} \Rightarrow T_H V_B^{\gamma-1} = T_C V_C^{\gamma-1} \Rightarrow \frac{T_C}{T_H} = \frac{V_B^{\gamma-1}}{V_C^{\gamma-1}}$$

Y lo mismo para la transformación DA:

$$T_D V_D^{\gamma-1} = T_A V_A^{\gamma-1} \Rightarrow T_C V_D^{\gamma-1} = T_H V_A^{\gamma-1} \Rightarrow \frac{T_C}{T_H} = \frac{V_A^{\gamma-1}}{V_D^{\gamma-1}}$$

Como los primeros miembros son iguales, los segundos también lo serán:

$$\frac{V_B^{\gamma-1}}{V_C^{\gamma-1}} = \frac{V_A^{\gamma-1}}{V_D^{\gamma-1}} \Rightarrow \frac{V_B}{V_C} = \frac{V_A}{V_D} \Rightarrow \frac{V_D}{V_C} = \frac{V_A}{V_B} \Rightarrow \ln \frac{V_D}{V_C} = \ln \frac{V_A}{V_B} = -\ln \frac{V_B}{V_A}$$

El rendimiento del ciclo de Carnot es pues:

$$\eta = \frac{\Delta W}{\Delta Q_{AB}} = \frac{nRT_H \ln \frac{V_B}{V_A} + nRT_C \ln \frac{V_D}{V_C}}{nRT_H \ln \frac{V_B}{V_A}} = 1 + \frac{T_C \ln \frac{V_D}{V_C}}{T_H \ln \frac{V_B}{V_A}} = 1 - \frac{T_C}{T_H}$$

$$\underline{\eta = 1 - \frac{T_C}{T_H}}$$