El módulo de compresibilidad de un material, K, es el cociente, cambiado de signo, entre la presión que actúa sobre él y la variación unitaria de volumen correspondiente:

$$K = -\frac{P}{\Delta V / V}$$

Consideremos un material en forma de cubo, de lado l, sumergido en un fluido, y por tanto sometido a una presión P. De esta forma, sobre cada una de sus caras actúa una fuerza compresiva de valor:

$$P = \frac{F}{A} \Rightarrow F = PA$$

siendo A el área de cada una de las caras. Esta fuerza es igual en las tres direcciones del espacio ($F_X=F_Y=F_Z=F$) ya que la presión del fluido es la misma en todas las direcciones.

Debido a estas fuerzas compresivas, el material experimenta cambios en sus dimensiones. Trabajando siempre en la zona elástica, podemos relacionar estos cambios con el módulo de Young y el coeficiente de Poisson:

$$\frac{\Delta l_X}{l_X} = \frac{F_X}{AE} - \frac{\mu F_Y}{AE} - \frac{\mu F_Z}{AE} = \frac{F}{AE} - \frac{\mu F}{AE} - \frac{\mu F}{AE} = \frac{P}{E} - \frac{2\mu P}{E} = \frac{1-2\mu}{E}P$$
$$\frac{\Delta l_Y}{l_Y} = \frac{F_Y}{AE} - \frac{\mu F_X}{AE} - \frac{\mu F_Z}{AE} = \frac{F}{AE} - \frac{\mu F}{AE} - \frac{\mu F}{AE} = \frac{P}{E} - \frac{2\mu P}{E} = \frac{1-2\mu}{E}P$$
$$\frac{\Delta l_Z}{l_Z} = \frac{F_Z}{AE} - \frac{\mu F_X}{AE} - \frac{\mu F_Y}{AE} = \frac{F}{AE} - \frac{\mu F}{AE} - \frac{\mu F}{AE} = \frac{P}{E} - \frac{2\mu P}{E} = \frac{1-2\mu}{E}P$$

donde hemos tenido ya en cuenta que las fuerzas en las tres direcciones del espacio son iguales y que el área de cada cara es la misma. Introduciremos además al final el signo negativo correspondiente a fuerzas compresivas. Así, los cambios unitarios de longitud son iguales en las tres direcciones del espacio:

$$\frac{\Delta l_X}{l_X} = \frac{\Delta l_Y}{l_Y} = \frac{\Delta l_Z}{l_Z} = \frac{1-2\mu}{E}P$$

El cambio en las dimensiones del paralelepípedo irá acompañado de un cambio de volumen. Si las dimensiones originales de las aristas eran l, el volumen inicial del cubo será:

$$V=l^3$$

Calculando la diferencial del volumen tendremos:

$$dV=3l^2dl$$

Y la variación relativa de volumen será:

$$\frac{dV}{V} = 3\frac{l^2 dl}{l^3} = 3\frac{dl}{l}$$

Si consideramos las deformaciones unitarias uniformes, podemos sustituir los diferenciales por incrementos finitos y tendremos:

$$\frac{dV}{V} = 3\frac{dl}{l} \Rightarrow \frac{\Delta V}{V} = 3\frac{\Delta l}{l} = \frac{3(1-2\mu)}{E}P$$

Teniendo en cuenta que hay que poner signo negativo, ya que las fuerzas son compresivas (el volumen disminuye):

$$\frac{\Delta V}{V} = -\frac{3(1-2\mu)}{E}P$$

Teniendo en cuenta la definición del módulo de compresibilidad:

$$K = -\frac{P}{\Delta V / V}$$

Podemos escribir por tanto:

$$K = -\frac{P}{\Delta V / V} = \frac{PE}{3(1-2\mu)P} = \frac{E}{3(1-2\mu)}$$

$$\underline{K = \frac{E}{3(1-2\mu)}}$$