

a) Previo a la resolución del problema determinaremos las constantes del gas. Conocemos la constante de los gases perfectos y el coeficiente adiabático, luego podemos plantear las ecuaciones:

$$\gamma = \frac{c_p}{c_v}$$

$$R = c_p - c_v$$

De la primera ecuación:

$$\gamma = \frac{c_p}{c_v} \Rightarrow c_p = \gamma c_v$$

Y sustituyendo en la segunda:

$$R = c_p - c_v \Rightarrow R = \gamma c_v - c_v \Rightarrow c_v = \frac{R}{\gamma - 1} = \frac{2}{1.4 - 1} = 5 \text{ cal/molK}$$

Y el calor específico a presión constante:

$$c_p = \gamma c_v = 1.4 \cdot 5 = 7 \text{ cal/molK}$$

Pasamos a continuación al problema. En primer lugar necesitamos los parámetros P, V y T en cada uno de los estados. Inicialmente, en el punto que llamaremos 1, conocemos la presión y la temperatura:

$$P_1 = 4 \text{ atm}; T_1 = 27^\circ\text{C} = 300\text{K}$$

Y el volumen podemos determinarlo teniendo en cuenta que se trata de un gas perfecto, luego cumple la ecuación de este tipo de gases:

$$P_1 V_1 = nRT_1 \Rightarrow V_1 = \frac{nRT_1}{P_1} = \frac{1 \cdot 0.082 \cdot 300}{4} = 6.15 \text{ l}$$

A continuación el gas se expande isotérmicamente hasta que el volumen se duplica, luego:

$$V_2 = 2V_1 = 2 \cdot 6.15 = 12.30 \text{ l}$$

Como la expansión es isotérmica:

$$T_2 = T_1 = 300\text{K}$$

En cuanto a la presión, sabemos que no entra ni sale materia del sistema, luego el número de moles se mantiene constante. Por tanto de la ecuación de los gases perfectos podemos deducir:

$$PV = nRT \Rightarrow nR = \frac{PV}{T} = \text{cte}$$

Aplicando esta ecuación a los estados 1 y 2 y teniendo en cuenta que $T_1 = T_2$:

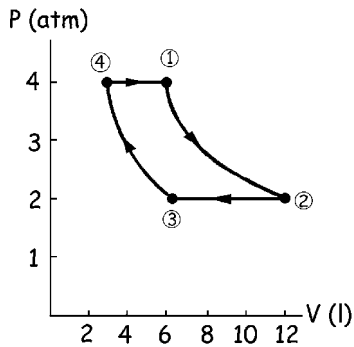
$$\frac{P_1 V_1}{T_1} = \frac{P_2 V_2}{T_2} \Rightarrow P_1 V_1 = P_2 V_2 \Rightarrow 4 \cdot 6.15 = 12.30 P_2 \Rightarrow P_2 = 2 \text{ atm}$$

A continuación el gas se comprime a presión constante hasta el volumen inicial, luego en el estado 3 tendremos:

$$V_3 = V_1 = 6.15 \text{ l}; P_3 = P_2 = 2 \text{ atm}$$

Respecto a la temperatura aplicamos la ecuación de la constancia del número de moles a los estados 2 y 3 (tenemos en cuenta además que la presión es constante):

$$\frac{P_2 V_2}{T_2} = \frac{P_3 V_3}{T_3} \Rightarrow \frac{V_2}{T_2} = \frac{V_3}{T_3} \Rightarrow \frac{12.30}{300} = \frac{6.15}{T_3} \Rightarrow T_3 = 150\text{K}$$



Seguidamente, el gas se comprime isotérmicamente hasta una presión de 4 atm, luego en este último estado:

$$P_4=4 \text{ atm}; T_4=T_3=150\text{K}$$

Y aplicando la ecuación de la constancia del número de moles (proceso isoterma):

$$\frac{P_3 V_3}{T_3} = \frac{P_4 V_4}{T_4} \Rightarrow P_3 V_3 = P_4 V_4 \Rightarrow 2 \cdot 6.15 = 4 V_4 \Rightarrow V_4 = 3.075 \text{ l}$$

Con todos los datos podemos trazar el gráfico PV, (ver figura) teniendo en cuenta que las isotermas vienen representadas por líneas curvas.

b) Vamos a determinar el trabajo que realiza el gas en todo el ciclo. Para ello determinaremos el trabajo que se realiza en cada rama y después sumaremos las cuatro. El proceso 1→2 es un proceso isotérmico luego el trabajo será:

$$\Delta W_{12} = nRT_1 \ln \frac{V_2}{V_1} = 1 \cdot 2 \cdot 300 \ln \frac{12.30}{6.15} = 415.89 \text{ cal} = 1738.41 \text{ J}$$

El proceso 2→3 es isobaro, luego:

$$\Delta W_{23} = P_2(V_3 - V_2) = 2(6.15 - 12.30) = -12.30 \text{ atml} = -1246.36 \text{ J}$$

La transformación 3→4 vuelve a ser isoterma:

$$\Delta W_{34} = nRT_3 \ln \frac{V_4}{V_3} = 1 \cdot 2 \cdot 150 \ln \frac{3.075}{6.15} = -207.94 \text{ cal} = -869.21 \text{ J}$$

Y por último la transformación 4→1 es isobara:

$$\Delta W_{41} = P_4(V_1 - V_4) = 4(6.15 - 3.075) = 12.30 \text{ atml} = 1246.29 \text{ J}$$

El trabajo total efectuado en el ciclo es:

$$\Delta W = \Delta W_{12} + \Delta W_{23} + \Delta W_{34} + \Delta W_{41} = 1738.41 - 1246.36 - 869.21 + 1246.29 = 869.20 \text{ J}$$

$$\underline{\Delta W = 869.20 \text{ J}}$$

c) El rendimiento del ciclo es el cociente entre el trabajo total y el calor cedido (signo negativo). El trabajo ya lo tenemos, sólo nos faltan los calores cedidos en cada rama. Vamos a determinarlos. Como el proceso 1→2 es isoterma la variación de energía interna será nula, luego por el primer principio:

$$\Delta U_{12} = \Delta Q_{12} - \Delta W_{12} \Rightarrow 0 = \Delta Q_{12} - \Delta W_{12} \Rightarrow \Delta Q_{12} = \Delta W_{12} = 1738.41 \text{ J}$$

El proceso 2→3 es isobaro. Podemos determinar la variación de energía interna teniendo en cuenta que se trata de un gas ideal biatómico, por lo que:

$$c_v = 5 \text{ cal/molK}$$

Así pues tendremos:

$$\Delta U_{23} = n c_v (T_3 - T_2) = 1 \cdot 5(150 - 300) = -750 \text{ cal} = -3135 \text{ J}$$

Y aplicando el primer principio:

$$\Delta U_{23} = \Delta Q_{23} - \Delta W_{23} \Rightarrow \Delta Q_{23} = \Delta U_{23} + \Delta W_{23} = -3135 - 1246.36 = -4381.36 \text{ J}$$

El proceso 3→4 es de nuevo isoterma por lo que la variación de energía interna es nula. Así pues:

$$\Delta U_{34} = \Delta Q_{34} - \Delta W_{34} \Rightarrow 0 = \Delta Q_{34} - \Delta W_{34} \Rightarrow \Delta Q_{34} = \Delta W_{34} = -869.21 \text{ J}$$

Por último, el proceso 4→1 es isobara. Tendremos pues:

$$\Delta U_{41} = n c_v (T_1 - T_4) = 1 \cdot 5(300 - 150) = 750 \text{ cal} = 3135 \text{ J}$$

Y aplicando el primer principio:

$$\Delta U_{41} = \Delta Q_{41} - \Delta W_{41} \Rightarrow \Delta Q_{41} = \Delta U_{41} + \Delta W_{41} = 3135 + 1246.29 = 4381.29 \text{ J}$$

Entonces, el rendimiento del ciclo, teniendo en cuenta sólo los calores negativos, es:

$$\eta = \frac{\Delta W}{|\Delta Q_{\text{cedido}}|} = \frac{\Delta W}{|\Delta Q_{23}| + |\Delta Q_{34}|} = \frac{869.20}{4381.36 + 869.21} = 0.1655 = 16.55\%$$

$\eta = 16.55\%$

d) Si tuviéramos un ciclo de Carnot que operara entre las temperaturas de las isothermas tendríamos que las temperaturas del foco caliente y del foco frío serían:

$$T_H = 300\text{K}; T_C = 150\text{K}$$

El rendimiento del ciclo de Carnot es:

$$\eta_{\text{Carnot}} = 1 - \frac{T_C}{T_H} = 1 - \frac{150}{300} = 0.5 = 50\%$$

$$\underline{\eta_{\text{Carnot}} = 50\%}$$