a) En primer lugar pasaremos las alturas sobre la superficie terrestre a distancias respecto del centro de la Tierra, que es lo que nos interesa realmente:

$$r_L=h_L+R_T=290+6370=6660 \text{ km}$$
$$r_S=h_S+R_S=611+6370=6981 \text{ km}$$

Como los dos cuerpos se encuentran en trayectorias circulares, sobre ellos sólo actúa la fuerza de atracción gravitatoria, y por se el movimiento circular y uniforme la única aceleración que tienen es la normal o centrípeta. Así pues, aplicando en cualquiera de las dos órbitas la segunda ley de Newton:

$$F_g = ma_n \Rightarrow G\frac{Mm}{r^2} = m\frac{v^2}{r} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{GM}{r}}$$

Aplicando esta ecuación a los dos cuerpos:

$$v_L = \sqrt{\frac{GM}{r_L}} = \sqrt{\frac{6.67\cdot10^{-11}\cdot6\cdot10^{24}}{6660\cdot10^3}} = 7751.78 \text{ m/s}$$

$\underline{v_L=7751.78 \text{ m/s}}$

$$v_S = \sqrt{\frac{GM}{r_S}} = \sqrt{\frac{6.67\cdot10^{-11}\cdot6\cdot10^{24}}{6981\cdot10^3}} = 7571.46 \text{ m/s}$$

$\underline{v_S=7571.46 \text{ m/s}}$

b) Ahora sabemos que la fuerza de atracción gravitatoria sobre el satélite el esl 91.02% de la fuerza de atracción gravitatoria sobre la lanzadera. Por tanto:

$$F_S = 0.9102F_L \Rightarrow G\frac{Mm_S}{r_S^2} = 0.9102G\frac{Mm_L}{r_L^2}$$

$$m_S = 0.9102\, m_L\,\frac{r_S^2}{r_L^2} = 2700 \text{ kg}$$

$\underline{m_S=2700 \text{ kg}}$

c) La velocidad areolar es igual al momento cinético dividido entre el doble de la masa del cuerpo. Como el momento cinético es constante podemos calcularlo en cualquier punto de la órbita. Es mucho más cómodo determinarlo en el perigeo o el apogeo, ya que en estos puntos la velocidad es perpendicular al radio vector y no tendríamos que tener en cuenta el ángulo que forman a la hora de calcular el momento angular. Vamos a calcularlo por ejemplo en el punto C. En dicho punto podemos determinar la velocidad de la lanzadera de dos formas. En la segunda órbita de transición el eje mayor vale:

$$2a_2=r_C+r_D=6900+6981=13881 \text{ km}$$

Teniendo en cuenta que se conserva la energía total, si llamamos v'_C a la velocidad de la lanzadera en este punto (para no confundirla con v_C, que será la velocidad de la lanzadera en este mismo punto pero en la primera órbita de transición):

$$E_T = E_C + E_P \Rightarrow -G\frac{Mm_L}{2a_2} = \frac{1}{2}m_L v'^2_C - G\frac{Mm_L}{r_C^2} \Rightarrow -G\frac{M}{2a_2} = \frac{1}{2}v'^2_C - G\frac{M}{r_C^2}$$

$$-6.67\cdot10^{-11}\,\frac{6\cdot10^{24}}{13881\cdot10^3} = \frac{1}{2}v'^2_C - 6.67\cdot10^{-11}\,\frac{6\cdot10^{24}}{6900\cdot10^3} \Rightarrow v'_C = 7637.96 \text{ m/s}$$

Esta misma velocidad podemos determinarla a través de los incrementos de velocidad. En primer lugar se produce un incremento de velocidad en la lanzadera en el punto B, de modo que dicho vehículo queda insertado en la primera órbita de transición:

$$v'_B=v_B+\Delta v_B=v_L+\Delta v_B=7751.78+68.3=7820.08 \text{ m/s}$$

A continuación la nave queda insertada en la primera órbita de transición. Al desplazarse desde B hasta C su velocidad varía, pero debe conservarse el momento cinético, de modo que:

$$L_B = L_C \Rightarrow m_L r_B v'_B = m_L r_C v_C \Rightarrow v_C = \frac{r_B v'_B}{r_C} = \frac{6660 \cdot 7820.08}{6900} = 7548.08 \text{ m/s}$$

Y en este punto se produce el segundo incremento de velocidad, quedando la lanzadera insertada en la segunda órbita de transición:

$$v'_C=v_C+\Delta v_C=7548.08+89.95=7638.03 \text{ m/s}$$

Vemos que prácticamente hemos obtenido la misma velocidad a través de los dos métodos. En cualquier caso, la velocidad areolar será:

$$\frac{dA}{dt} = \frac{L_2}{2m_L} = \frac{m_L r_C v'_C}{2m_L} = \frac{r_C v'_C}{2} = \frac{6900 \cdot 10^3 \cdot 7638.03}{2} = 2.635 \cdot 10^{10} \text{ m/s}^2$$

$$\underline{\frac{dA}{dt} = 2.635 \cdot 10^{10} \text{ m/s}^2}$$

Obviamente el mismo resultado deberíamos obtener en cualquier otro punto de la órbita, por ejemplo, en el punto D. En dicho punto podemos determinar la velocidad también por dos métodos. En primer lugar a través de la conservación de la energía:

$$E_T = E_C + E_P \Rightarrow -G\frac{Mm_L}{2a_2} = \frac{1}{2}m_L v_D^2 - G\frac{Mm_L}{r_D^2} \Rightarrow -G\frac{M}{2a_2} = \frac{1}{2}v_D^2 - G\frac{M}{r_D^2}$$

$$-6.67 \cdot 10^{-11}\frac{6 \cdot 10^{24}}{13881 \cdot 10^3} = \frac{1}{2}v_D^2 - 6.67 \cdot 10^{-11}\frac{6 \cdot 10^{24}}{6981 \cdot 10^3} \Rightarrow v_D = 7549.34 \text{ m/s}$$

Y también podemos determinar dicha velocidad por conservación del momento angular:

$$L_C = L_D \Rightarrow m_L r_C v'_C = m_L r_D v_D \Rightarrow v_D = \frac{r_C v'_C}{r_D} = \frac{6900 \cdot 7638.03}{6981} = 7549.41 \text{ m/s}$$

Vemos, como antes, que el resultado es prácticamente el mismo. La velocidad areolar de este modo sería:

$$\frac{dA}{dt} = \frac{L_2}{2m_L} = \frac{m_L r_D v_D}{2m_L} = \frac{r_D v_D}{2} = \frac{6981 \cdot 10^3 \cdot 7549.41}{2} = 2.635 \cdot 10^{10} \text{ m/s}^2$$

$$\underline{\frac{dA}{dt} = 2.635 \cdot 10^{10} \text{ m/s}^2}$$

d) Como ya tenemos las velocidades antes y después del incremento de velocidad en el punto D, podemos determinar dicho incremento:

$$\Delta v_D=v'_D-v_D=v_S-v_D=7571.46-7549.41=22.05 \text{ m/s}$$

$$\underline{\Delta v_D= 22.05 \text{ m/s}}$$