Un cohete se observa desde la Tierra a 14000 km del centro de ésta, con una velocidad de 28000 km/h. El ángulo entre los vectores posición (medido desde el centro de la Tierra) y velocidad es de 41°. a) Determinar el tipo de órbita que está describiendo el cohete, su energía total y su momento angular. En su recorrido posterior y a una distancia de 10000 km del centro de la Tierra se quiere que pase a una órbita elíptica en torno a la misma. Para ello se encienden los motores de forma que su velocidad pasa a ser 16000 km/h y se inclina la nave de forma que en dicha posición el ángulo entre los vectores posición (medido respecto a la Tierra) y velocidad es de 28°. Determinar: b) el incremento de velocidad que ha sido necesario comunicar a la nave en dicho punto; c) la velocidad de la nave en el perigeo y apogeo de la nueva órbita elíptica; d) el semieje mayor de dicha órbita elíptica y la ecuación de la misma: e) el ángulo al que se produciría el choque del cohete con la Tierra si se le dejase continuar en esta órbita elíptica.

DATOS: Constante de gravitación universal G=6.67 · 10^{-11} Nm^2/kg^2; masa de la Tierra M=6 · 10^{24} kg; radio de la Tierra R=6370 km.

a) La velocidad del cohete en el punto dado será, en el Sistema Internacional:

$$v=28000 \text{ km/h}=7777.78 \text{ m/s}$$

La energía total de la órbita será:

$$E_T = E_C + E_P = \frac{1}{2}mv^2 - G\frac{Mm}{r} =$$

$$= \frac{1}{2}m \cdot 7777.78^2 - 6.67 \cdot 10^{-11}\frac{6 \cdot 10^{24} m}{14000 \cdot 10^3} = 1661199.294m \text{ J}$$

<u>E_T=1661199.294m J (si m en kg)</u>

Como la energía total de la órbita es positiva la órbita es una hipérbola.

<u>HIPÉRBOLA</u>

El momento angular será:

$$\mathbf{L}=\mathbf{r} \times \mathbf{p}=\mathbf{r} \times m\mathbf{v} \Rightarrow L=mrv\,\text{sen}\varphi$$

siendo φ el ángulo que forman los vectores posición y velocidad. Así pues:

$$L=mrv\,\text{sen}\varphi=m14000 \cdot 10^3 \cdot 7777.78 \cdot \text{sen}41°=7.144 \cdot 10^{10}m \text{ kgm}^2/\text{s}$$

<u>L=7.144 · 10^{10}m kgm^2/s (si m en kg)</u>

b) En la primera órbita se debe conservar la energía total, de modo que en el nuevo punto, que llamaremos C, la energía sigue siendo la misma. Como conocemos el vector de posición (10000 km) podremos determinar la velocidad en ese punto antes del incremento:

$$E_T = E_{CC} + E_{PC} \Rightarrow 1661199.294m = \frac{1}{2}mv_C^2 - G\frac{Mm}{r_C}$$

$$1661199.294 = \frac{1}{2}v_C^2 - 6.67 \cdot 10^{-11}\frac{6 \cdot 10^{24}}{10000 \cdot 10^3} \Rightarrow v_C = 9130.30\ m/s$$

En ese mismo punto después del incremento de velocidad, ésta vale:

$$v'_C=16000\ km/h=4444.44\ m/s$$

Por tanto el incremento de velocidad es:

$$\Delta v_C=v'_C-v_C=4444.44-9130.30=-4685.86\ m/s$$

$$\underline{\Delta v_C=-4685.86\ m/s}$$

c) Para esta nueva órbita conocemos tanto la energía total como el momento angular, que serán:

$$E_T = E_{CC} + E_{TC} = \frac{1}{2}mv'^2_C - G\frac{Mm}{r_C} =$$

$$= \frac{1}{2}m4444.44^2 - 6.67 \cdot 10^{-11}\frac{6 \cdot 10^{24}m}{10000 \cdot 10^3} = -30143476.54m\ J$$

$$\mathbf{L}=\mathbf{r_C} \times \mathbf{p_C}=\mathbf{r_C} \times m\mathbf{v'_C} \Rightarrow L_C=mr_Cv'_C\text{sen}\varphi_C=$$

$$=m10000 \cdot 10^3 \cdot 4444.44\text{sen}28^\circ=2.0865 \cdot 10^{10}m\ kgm^2/s$$

Obviamente la energía total nos sale negativa, ya que se trata de una órbita elíptica.

Ahora sabemos que se conservan en la órbita tanto la energía como el momento angular, de modo que tendremos para el perigeo:

$$E_T = E_{CP} + E_{PP} \Rightarrow -30143476.54m = \frac{1}{2}mv_P^2 - G\frac{Mm}{r_P}$$

$$L=mr_Pv_P\text{sen}\varphi_P \Rightarrow 2.0865 \cdot 10^{10}m=mr_Pv_P\text{sen}90^\circ$$

ya que en el apogeo y en el perigeo el radio vector es perpendicular a la velocidad. Sustituyendo lo que conocemos:

$$-30143476.54 = \frac{1}{2}v_P^2 - G\frac{M}{r_P} \Rightarrow -30143476.54 = \frac{1}{2}v_P^2 - 6.67 \cdot 10^{-11}\frac{6 \cdot 10^{24}}{r_P}$$

$$2.0865 \cdot 10^{10}m=mr_Pv_P\text{sen}90^\circ \Rightarrow 2.0865 \cdot 10^{10}=r_Pv_P$$

De la segunda ecuación:

$$2.0865 \cdot 10^{10} = r_Pv_P \Rightarrow r_P = \frac{2.0865 \cdot 10^{10}}{v_P}$$

Y sustituyendo en la primera:

$$-30143476.54 = \frac{1}{2}v_P^2 - 6.67 \cdot 10^{-11}\frac{6 \cdot 10^{24}}{r_P}$$

$$-30143476.54 = \frac{1}{2}v_P^2 - 6.67 \cdot 10^{-11}\frac{6 \cdot 10^{24}v_P}{2.0865 \cdot 10^{10}}$$

$$0.5v_P^2 - 19180.45v_P + 30143476.54 = 0$$

$$v_P = \frac{19180.45 \pm \sqrt{19180.45^2 - 4 \cdot 0.5 \cdot 30143476.54}}{2 \cdot 0.5} = \begin{matrix} 36718.60\ m/s \\ 1641.84\ m/s \end{matrix}$$

Puesto que en la órbita se conservan tanto el momento angular como la energía total, habríamos obtenido exactamente las mismas ecuaciones si utilizando el apogeo en lugar del perigeo. Esto quiere decir que las dos soluciones que obtenemos son las velocidades en el perigeo y en el apogeo. Lógicamente, la velocidad mayor será la del perigeo (distancia menor, puesto que el momento angular es constante) y la menor la del apogeo:

$$\underline{v_P=36718.60\ m/s}$$

$$\underline{v_A=1641.84\ m/s}$$

d) Podemos determinar la distancia en el perigeo, a partir del momento angular

$$r_P = \frac{2.0865 \cdot 10^{10}}{v_P} = \frac{2.0865 \cdot 10^{10}}{36718.60} = 568240.62\ m = 568.24\ km$$

Y del mismo modo podríamos hacer para el apogeo:

$$r_A = \frac{2.0865 \cdot 10^{10}}{v_A} = \frac{2.0865 \cdot 10^{10}}{1641.84} = 12708302.88\ m = 12708.30\ km$$

Por tanto el semieje mayor es:

$$a = \frac{r_A + r_P}{2} = \frac{12708.30 + 568.24}{2} = 6638.27\ km$$

$$\underline{a=6638.27\ km}$$

Y la ecuación de la cónica será del tipo:

$$r = \frac{\alpha}{1+\varepsilon\cos\theta}$$

siendo α la ascensión recta y ε la excentricidad. La ascensión recta es:

$$\alpha = \frac{L^2}{GMm^2} = \frac{(2.0865 \cdot 10^{10} m)^2}{6.67 \cdot 10^{-11} \cdot 6 \cdot 10^{24} m^2} = 1087826.649\ m = 1087.83\ km$$

Y la excentricidad:

$$\varepsilon = \frac{r_A - r_P}{r_A + r_P} = \frac{12708.26 - 568.24}{12708.26 + 568.24} = 0.914$$

Por tanto la ecuación de la órbita es:

$$r = \frac{\alpha}{1+\varepsilon\cos\theta} = \frac{1087.83}{1+0.914\cos\theta}$$

$$\underline{r = \frac{1087.83}{1+0.914\cos\theta}}$$

e) En el momento del aterrizaje el radio vector coincide con el de la Tierra luego:

$$r = R \Rightarrow r = \frac{1087.83}{1+0.914\cos\theta} \Rightarrow R = \frac{1087.83}{1+0.914\cos\theta} \Rightarrow 6370 = \frac{1087.83}{1+0.914\cos\theta}$$

$$1087.83=6370+5824.72\cos\theta \Rightarrow \cos\theta=-0.907 \Rightarrow \theta=155.07^\circ$$

$$\underline{\theta=155.07^\circ}$$