a) Los radios en los puntos A y B son:

$$r_A=h_A+R_T=600+6370=6970 \text{ km}$$
$$r_B=h_B+R_T=60+6370=6430 \text{ km}$$

La órbita de la estación espacial es circular. Para dicha órbita:

$$F_g = ma_n \Rightarrow G\frac{Mm}{r_A^2} = m\frac{v_A^2}{r_A} \Rightarrow v_A = \sqrt{\frac{GM}{r_A}} = \sqrt{\frac{6.67\cdot10^{-11}\cdot 6\cdot10^{24}}{6970\cdot10^3}} = 7577.43 \text{ m/s}$$

$\underline{v_A=7577.43 \text{ m/s}}$

El período lo podemos obtener de la tercera ley de Kepler:

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{GM}r_A^3 \Rightarrow T = \sqrt{\frac{4\pi^2}{GM}r_A^3} = \sqrt{\frac{4\pi^2}{6.67\cdot10^{-11}\cdot 6\cdot10^{24}}(6970\cdot10^3)^3} = 5779.50 \text{ s}$$

$\underline{T=5779.50 \text{ s}}$

b) Desde A hasta B se describe una órbita elíptica (cuyo apogeo es el punto A). Entre estos dos puntos se conserva por tanto el momento angular y la energía mecánica. Así pues:

$$L_A = L_B \Rightarrow mr_A v'_A \operatorname{sen}\varphi_A = mr_B v_B \operatorname{sen}\varphi_B \Rightarrow r_A v'_A \operatorname{sen}\varphi_A = r_B v_B \operatorname{sen}\varphi_B$$

Puesto que el punto A es el apogeo de la órbita elíptica, la velocidad y el radio vector en ese instante son perpendiculares:

$$6970 v'_A \operatorname{sen}90^\circ = 6430 v_B \operatorname{sen}60^\circ \Rightarrow v'_A = \frac{6430 v_B \operatorname{sen}60^\circ}{6970} = 0.799 v_B$$

Como hemos dicho, también se conserva la energía mecánica:

$$E_{TA} = E_{TB} \Rightarrow E_{CA} + E_{PA} = E_{CB} + E_{PB} \Rightarrow \frac{1}{2}mv'^2_A - G\frac{Mm}{r_A} = \frac{1}{2}mv_B^2 - G\frac{Mm}{r_B}$$

$$\frac{1}{2}v'^2_A - G\frac{M}{r_A} = \frac{1}{2}v_B^2 - G\frac{M}{r_B} \Rightarrow \frac{1}{2}(0.799v_B)^2 - 6.67\cdot10^{-11}\frac{6\cdot10^{24}}{6970\cdot10^3} = \frac{1}{2}v_B^2 - 6.67\cdot10^{-11}\frac{6\cdot10^{24}}{6430\cdot10^3}$$

$\underline{v_B=5163.54 \text{ m/s}}$

c) La lanzadera llega al punto A con una velocidad v'_A:

$$v'_A=0.799v_B=4125.67 \text{ m/s}$$

Esa velocidad tiene que pasar a ser la de la órbita circular v_A, luego la variación de velocidad será:

$$\Delta v_A=v_A-v'_A=7577.43-4125.67=3451.76 \text{ m/s}$$

$\underline{\Delta v_A=3451.76 \text{ m/s}}$

d) Para que se produzca el acoplamiento, el tiempo que tarda la lanzadera en ir de A a B tiene que ser el mismo que tarda la estación espacial en recorrer el ángulo β:

t=20 min=1200 s

Así pues, para la estación espacial, que se mueve en una órbita circular a velocidad constante:

$$\omega = \frac{\beta}{t} = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow \beta = \frac{2\pi t}{T} = \frac{2\pi \cdot 1200}{5779.50} = 1.305 \text{ rad} = 74.75^{\circ}$$

<u>β=74.75º</u>

e) Necesitamos conocer la velocidad en el punto D cuando la lanzadera se encuentra ya en la órbita elíptica DC. Para ello necesitaríamos el eje mayor de esta órbita. Conocemos su apogeo pero no su perigeo (que estará dentro de la Tierra). Para hallar este perigeo, vamos a determinar la ecuación de esta cónica. La ecuación general es:

$$r = \frac{\alpha}{1 + \varepsilon \cos\theta}$$

Conocemos dos puntos de esta elipse, luego con ellos podremos determinar α y ε. En primer lugar conocemos el apogeo, luego:

$$\text{Para } r = r_D = r_A \Rightarrow \theta = 180^{\circ} \Rightarrow \cos\theta = -1 \Rightarrow r_A = \frac{\alpha}{1-\varepsilon} \Rightarrow 6970 = \frac{\alpha}{1-\varepsilon}$$

Y el otro punto que conocemos es el punto C (aterrizaje):

$$\text{Para } r = R_T \Rightarrow \theta = 180 + 110 = 290^{\circ} \Rightarrow \cos\theta = 0.342$$

$$R_T = \frac{\alpha}{1 + 0.342\varepsilon} \Rightarrow 6370 = \frac{\alpha}{1 + 0.342\varepsilon}$$

Dividiendo las dos expresiones obtenidas:

$$\frac{6970}{6370} = \frac{\dfrac{\alpha}{1-\varepsilon}}{\dfrac{\alpha}{1+0.342\varepsilon}} \Rightarrow \frac{6970}{6370} = \frac{1+0.342\varepsilon}{1-\varepsilon} \Rightarrow 6970 - 6970\varepsilon = 6370 + 2178.67\varepsilon \Rightarrow \varepsilon = 0.0656$$

Y la ascensión recta:

$$6970 = \frac{\alpha}{1-\varepsilon} \Rightarrow \alpha = 6970(1-\varepsilon) = 6970(1-0.0656) = 6512.88 \text{ km}$$

Por tanto la ecuación de la cónica es:

$$r = \frac{\alpha}{1 + \varepsilon\cos\theta} = \frac{6512.88}{1 + 0.0656\cos\theta}$$

Para el perigeo de la órbita:

$$r = r_P \Rightarrow \theta = 0^o \Rightarrow \cos\theta = 1 \Rightarrow r_P = \frac{6512.88}{1 + 0.0656} = 6111.94 \text{ km}$$

De modo que el eje mayor de esta órbita es:

$$2a=r_D+r_P=r_A+r_P=6970+6111.94=13081.94 \text{ km}$$

Ahora, por conservación de la energía podemos determinar la velocidad en el punto D cuando la lanzadera está en la órbita elíptica:

$$E_T = E_{CD} + E_{PD} \Rightarrow -G\frac{Mm}{2a} = \frac{1}{2}mv'^2_D - G\frac{Mm}{r_D} \Rightarrow -G\frac{M}{2a} = \frac{1}{2}v'^2_D - G\frac{M}{r_D}$$

$$-6.67 \cdot 10^{-11}\frac{6 \cdot 10^{24}}{13081.94 \cdot 10^3} = \frac{1}{2}v'^2_D - 6.67 \cdot 10^{-11}\frac{6 \cdot 10^{24}}{6970 \cdot 10^3} \Rightarrow v'_D = 7324.71 \text{ m/s}$$

Antes de variar la velocidad la lanzadera se encontraba en la órbita circular, luego su velocidad sería:

$$v_D=v_A=7577.43 \text{ m/s}$$

El incremento de velocidad será:

$$\Delta v_D=v'_D-v_D=7324.71-7577.43=-252.72 \text{ m/s}$$

$$\underline{\Delta v_D=-252.72 \text{ m/s}}$$