a) Denominaremos P al perigeo de esta elipse y A a su apogeo. El eje mayor de la elipse vale:

$$2a=r_A+r_P=20000+10000=30000 \text{ km}$$

Por tanto, por conservación de la energía en el apogeo:

$$E_T = E_{CA} + E_{PA} \Rightarrow -G\frac{Mm}{2a} = \frac{1}{2}mv_A^2 - G\frac{Mm}{r_A} \Rightarrow -G\frac{M}{2a} = \frac{1}{2}v_A^2 - G\frac{M}{r_A}$$

$$-6.67\cdot 10^{-11}\frac{6\cdot 10^{24}}{30000\cdot 10^3} = \frac{1}{2}v_A^2 - 6.67\cdot 10^{-11}\frac{6\cdot 10^{24}}{20000\cdot 10^3}$$

$\underline{v_A=3652.40 \text{ m/s}}$

Haciendo lo mismo en el perigeo:

$$E_T = E_{CP} + E_{PP} \Rightarrow -G\frac{Mm}{2a} = \frac{1}{2}mv_P^2 - G\frac{Mm}{r_P} \Rightarrow -G\frac{M}{2a} = \frac{1}{2}v_P^2 - G\frac{M}{r_P}$$

$$-6.67\cdot 10^{-11}\frac{6\cdot 10^{24}}{30000\cdot 10^3} = \frac{1}{2}v_P^2 - 6.67\cdot 10^{-11}\frac{6\cdot 10^{24}}{10000\cdot 10^3}$$

$\underline{v_P=7304.79 \text{ m/s}}$

Esta última velocidad también podría haberse determinado por conservación del momento angular entre los puntos A y P, teniendo en cuenta además que en estos puntos el radio vector es perpendicular a la velocidad ($\varphi_A=\varphi_P=90º \Rightarrow \text{sen}\varphi_A=\text{sen}\varphi_P=1$):

$$L_A=L_P \Rightarrow mr_Av_A\text{sen}\varphi_A=mr_Pv_P\text{sen}\varphi_P \Rightarrow r_Av_A=r_Pv_P \Rightarrow 20000\cdot 3652.40=10000v_P$$

$\underline{v_P=7304.80 \text{ m/s}}$

Vemos que el resultado es idéntico.

b) La ecuación de la cónica será del tipo:

$$r = \frac{\alpha}{1+\varepsilon\cos\theta}$$

donde falta determinar las dos constantes de la ecuación, α y ε, para lo cual necesitamos dos puntos conocidos de la cónica que son el apogeo y el perigeo. Para el perigeo:

$$r = r_P \Rightarrow \theta = 0º \Rightarrow \cos\theta = 1 \Rightarrow r_P = \frac{\alpha}{1+\varepsilon} \Rightarrow 10000 = \frac{\alpha}{1+\varepsilon}$$

Y para el apogeo:

$$r = r_A \Rightarrow \theta = 180º \Rightarrow \cos\theta = -1 \Rightarrow r_A = \frac{\alpha}{1-\varepsilon} \Rightarrow 20000 = \frac{\alpha}{1-\varepsilon}$$

Dividiendo miembro a miembro las dos ecuaciones:

$$\frac{10000}{20000} = \frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon} \Rightarrow 1+\varepsilon = 2-2\varepsilon \Rightarrow \varepsilon = 0.333$$

Y de cualquiera de las ecuaciones, por ejemplo, la del perigeo:

$$10000 = \frac{\alpha}{1+\varepsilon} \Rightarrow \alpha = 10000(1+\varepsilon) = 10000(1+0.333) = 13333.33\text{ km}$$

Por tanto la ecuación de la cónica es:

$$r = \frac{\alpha}{1+\varepsilon\cos\theta} = \frac{13333.33}{1+0.333\cos\theta}\text{ km}$$

$$\underline{r = \frac{13333.33}{1+0.333\cos\theta}\text{ km}}$$

c) En la órbita elíptica (2) tenemos que el apogeo A tiene una distancia de 20000 km, mientras que en el nuevo perigeo la distancia será $r_{P'}$. En este último punto conocemos la velocidad, luego por conservación de la energía tendremos:

$$E_T = E_{CP'} + E_{PP'} \Rightarrow -G\frac{Mm}{2a'} = \frac{1}{2}mv_{P'}^2 - G\frac{Mm}{r_{P'}} \Rightarrow -G\frac{M}{r_A + r_{P'}} = \frac{1}{2}v_{P'}^2 - G\frac{M}{r_{P'}}$$

$$-G\frac{Mr_{P'}}{r_A + r_{P'}} = \frac{1}{2}v_{P'}^2 r_{P'} - GM \Rightarrow -GMr_{P'} = \frac{1}{2}v_{P'}^2 r_{P'}(r_A + r_{P'}) - GM(r_A + r_{P'})$$

$$-GMr_{P'} = \frac{1}{2}v_{P'}^2 r_{P'} r_A + \frac{1}{2}v_{P'}^2 r_{P'}^2 - GMr_A - GMr_{P'} \Rightarrow 0 = v_{P'}^2 r_{P'} r_A + v_{P'}^2 r_{P'}^2 - 2GMr_A$$

$$8116^2 r_{P'}^2 + 8116^2 \cdot 20000 \cdot 10^3 r_{P'} - 2 \cdot 6.67 \cdot 10^{-11} \cdot 6 \cdot 10^{24} \cdot 20000 \cdot 10^3 = 0$$

$$65869456 r_{P'}^2 + 1.31738912 \cdot 10^{15} r_{P'} - 1.6008 \cdot 10^{22} = 0$$

$$r_{P'} = \frac{-1.31738912 \cdot 10^{15} \pm \sqrt{(1.31738912 \cdot 10^{15})^2 + 4 \cdot 65869456 \cdot 1.6008 \cdot 10^{22}}}{2 \cdot 65869456} =$$

$$= \begin{cases} 8520965.028\text{ m} = 8520.97\text{ km} \\ \text{negativa} \end{cases}$$

$\underline{r_{P'} = 8520.97\text{ km}}$

d) El acoplamiento se produce en el perigeo de la órbita elíptica (2), es decir, en P'. En dicho punto, inmediatamente antes del incremento de velocidad, Calister está en la trayectoria elíptica y su velocidad es $v_{P'}$=8116 m/s. En ese mismo punto e inmediatamente después del incremento de velocidad, Calister se tiene que situar en la órbita circular con una velocidad que llamaremos $v'_{P'}$. En dicha órbita la única fuerza que actuaría sobre el sistema es la de atracción gravitatoria, en la dirección radial y con sentido hacia el centro de la circunferencia; además, como el movimiento en dicha órbita es circular y uniforme la única aceleración del cuerpo es la normal, en la dirección del radio de curvatura y apuntando hacia el centro de curvatura. Aplicando la segunda ley de Newton:

$$\Sigma F_n = ma_n \Rightarrow G\frac{Mm}{r_{P'}^2} = m\frac{v'^2_{P'}}{r_{P'}} \Rightarrow v'_{P'} = \sqrt{\frac{GM}{r_{P'}}} = \sqrt{\frac{6.67 \cdot 10^{-11} \cdot 6 \cdot 10^{24}}{8520.97 \cdot 10^3}} = 6853.21\text{ m/s}$$

El incremento de velocidad será pues:

$$\Delta v_{P'} = v'_{P'} - v_{P'} = 6853.21 - 8116 = -1262.79\text{ m/s}$$

$\underline{\Delta v_{P'} = -1262.79\text{ m/s}}$

e) La nave Epolus tiene una trayectoria circular, luego el movimiento es circular y uniforme, es decir, con velocidad angular constante. Así pues, el ángulo θ será:

$$\omega = \frac{\theta}{t} \Rightarrow \theta = \omega t$$

donde ω es la velocidad angular de la nave y t el tiempo que tarda dicha nave en recorrer el ángulo θ. La velocidad angular no es problema, ya que por ser un movimiento circular la velocidad angular es el cociente entre la lineal ($v'_{P'}$) y el radio ($r_{P'}$). En cuanto al tiempo, podemos tener en cuenta que para que Calister y Epolus se acoplen tienen que llegar al punto P' en el mismo instante de tiempo. Puesto que cuando Epolus sale del punto marcado en el dibujo Calister se encuentra en el apogeo de su órbita, el tiempo que tarda Epolus en recorrer el ángulo θ tiene que ser el mismo que tarda Calister en ir desde el apogeo hasta el perigeo de su órbita; como barre media elipse, dicho tiempo será la mitad del período de la elipse. En dicha elipse el semieje mayor es:

$$a' = \frac{r_A + r_{P'}}{2} = \frac{20000 + 8520.97}{2} = 14260.485 \text{ km}$$

Tendremos entonces que:

$$\theta = \omega t = \frac{v'_{P'}}{r_{P'}} \cdot \frac{T_{(2)}}{2} = \frac{v'_{P'}}{2r_{P'}} \sqrt{\frac{4\pi^2}{GM} a'^3} = \frac{6853.21}{2 \cdot 8520.97 \cdot 10^3} \sqrt{\frac{4\pi^2}{6.67 \cdot 10^{-11} \cdot 6 \cdot 10^{24}} (14260.485 \cdot 10^3)^3} =$$

=6.801 rad=29.71º

<u>θ=29.71º</u>