a) La trayectoria de aproximación es parabólica, luego la energía en esta órbita tiene que ser nula. Con ello, podemos determinar la velocidad de la nave al llegar al punto A:

$$E_{Taproximación} = 0 \Rightarrow E_{CA} + E_{PgA} = 0 \Rightarrow \frac{1}{2}mv_A^2 - G\frac{Mm}{r_A} = 0 \Rightarrow v_A = \sqrt{\frac{2GM}{r_A}} =$$

$$= \sqrt{\frac{2 \cdot 6.67 \cdot 10^{-11} \cdot 6.444 \cdot 10^{23}}{9000 \cdot 10^3}} = 3090.54 \text{ m/s}$$

En el punto A la velocidad de la sonda se reduce en Δv_A para situarla en la primera órbita de transferencia, de modo que tendremos:

$$v'_A = v_A - \Delta v_A = 3090.54 - 440 = 2650.54 \text{ m/s}$$

Con esta velocidad la sonda se encuentra en la primera órbita de transición, que es una elipse. Aplicamos la energía total de esta elipse a este punto A y tendremos:

$$E_{Telipse1} = E_{CA} + E_{PgA} \Rightarrow -G\frac{Mm}{2a_1} = \frac{1}{2}mv'^2_A - G\frac{Mm}{r_A}$$

$$-6.67 \cdot 10^{-11}\frac{6.444 \cdot 10^{23}}{2a_1} = \frac{1}{2}2650.54^2 - 6.67 \cdot 10^{-11}\frac{6.444 \cdot 10^{23}}{9000 \cdot 10^3}$$

$$2a_1 = 34030241.02 \text{ m} = 34030.24 \text{ km} \Rightarrow 2a_1 = r_A + r_B \Rightarrow r_B = 2a_1 - r_A = 34030.24 - 9000 = 25030.24 \text{ km}$$

$$\underline{r_B = 25030.24 \text{ km}}$$

b) A continuación vamos a determinar la velocidad en el punto B. Para conocer la velocidad en dicho punto en la primera órbita elíptica, aplicamos la conservación del momento angular entre las posiciones A y B:

$$L_A = L_B \Rightarrow r_A m v'_A \operatorname{sen}\varphi_A = r_B m v_B \operatorname{sen}\varphi_B$$

En los puntos A y B el radio vector es perpendicular a la velocidad, luego:

$$\varphi_A = \varphi_B = 90^\circ \Rightarrow \operatorname{sen}\varphi_A = \operatorname{sen}\varphi_B = 1$$

Nos queda pues:

$$r_A m v'_A \operatorname{sen}\varphi_A = r_B m v_B \operatorname{sen}\varphi_B \Rightarrow r_A v'_A = r_B v_B \Rightarrow 9000 \cdot 2650.54 = 25030.24 v_B \Rightarrow v_B = 953.04 \text{ m/s}$$

A continuación se desea situar la sonda en una segunda órbita elíptica, cuyo eje mayor es:

$$2a_2 = r_B + r_C = 25030.24 + 4000 = 29030.24 \text{ km}$$

Aplicando la conservación de la energía en esta órbita para el punto B, podemos determinar la velocidad que tiene que llevar la sonda en dicha órbita:

$$E_{Telipse2} = E_{CB} + E_{PgB} \Rightarrow -G\frac{Mm}{2a_2} = \frac{1}{2}mv'^2_B - G\frac{Mm}{r_B}$$

$$-6.67 \cdot 10^{-11}\frac{6.444 \cdot 10^{23}}{29030.24 \cdot 10^3} = \frac{1}{2}v'^2_B - 6.67 \cdot 10^{-11}\frac{6.444 \cdot 10^{23}}{25030.24 \cdot 10^3} \Rightarrow v'_B = 687.90 \text{ m/s}$$

Por tanto el incremento de velocidad que debe comunicarse a la sonda en el punto B para cambiar de la elipse 1 a la 2 es:

$$\Delta v_B = v'_B - v_B = 687.90 - 953.04 = -265.14 \text{ m/s}$$

$$\underline{\Delta v_B = -265.14 \text{ m/s}}$$

c) El radio vector de la sonda al ir desde A hasta B en la primera órbita de transferencia barre la mitad del área de la elipse. Como la velocidad areolar es constante, y en barrer el área completa tardaría un período, en barrer media área tardará medio período. De acuerdo a la tercera ley de Kepler:

$$t = \frac{T_1}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{4\pi^2}{GM}a_1^3} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{4\pi^2}{6.67\cdot10^{-11}\cdot6.444\cdot10^{23}}\left(\frac{34030241}{2}\right)^3} =$$
$$= 33632.70 \text{ s} = 9 \text{ h } 20 \text{ min } 33 \text{ s}$$

$$\underline{t = 9 \text{ h } 20 \text{ min } 33 \text{ s}}$$

d) Ahora vamos a ver las velocidades de la sonda en el punto C. Inicialmente se encuentra en la segunda órbita de transferencia. Aplicamos por tanto la conservación del momento angular entre las posiciones B y C:

$$L_B = L_C \Rightarrow r_B m v'_B \operatorname{sen}\varphi_B = r_C m v_C \operatorname{sen}\varphi_C$$

En los puntos B y C el radio vector es perpendicular a la velocidad, luego:

$$\varphi_B = \varphi_C = 90^\circ \Rightarrow \operatorname{sen}\varphi_B = \operatorname{sen}\varphi_C = 1$$

Nos queda pues:

$$r_B m v'_B \operatorname{sen}\varphi_B = r_C m v_C \operatorname{sen}\varphi_C \Rightarrow r_B v'_B = r_C v_C \Rightarrow 25030.24 \cdot 687.90 = 4000 v_C \Rightarrow v_C = 4304.58 \text{ m/s}$$

Al final la sonda debe quedar insertada en la trayectoria circular. En una trayectoria circular el movimiento es circular y uniforme, de modo que la única aceleración que debe tener la sonda es la normal o centrípeta. En cuanto a fuerzas, estará sometida a la fuerza de atracción gravitatoria, que tiene la dirección del radio de curvatura. Así pues, aplicando la segunda ley de Newton a dicha órbita:

$$\Sigma F_n = m a_n \Rightarrow G\frac{Mm}{r_C^2} = m\frac{v'^2_C}{r_C} \Rightarrow v'_C = \sqrt{\frac{GM}{r_C}} = \sqrt{\frac{6.67\cdot10^{-11}\cdot6.444\cdot10^{23}}{4000\cdot10^3}} = 3278.01 \text{ m/s}$$

El incremento de velocidad en el punto C es por tanto:

$$\Delta v_C = v'_C - v_C = 3278.01 - 4304.58 = -1026.57 \text{ m/s}$$

$$\underline{\Delta v_C = -1026.57 \text{ m/s}}$$

e) La ecuación de la cónica será:

$$r = \frac{\alpha}{1 + \varepsilon\cos\theta}$$

donde tendremos que determinar la ascensión recta (α) y la excentricidad (ε). Para ello conocemos dos puntos de la cónica, los puntos B y C. Aplicando la ecuación de la cónica a estos dos puntos tendremos:

$$r = r_B \Rightarrow \theta = 180^o \Rightarrow \cos\theta = -1 \Rightarrow r_B = \frac{\alpha}{1-\varepsilon} \Rightarrow 25030.24 = \frac{\alpha}{1-\varepsilon}$$

$$r = r_C \Rightarrow \theta = 0^\circ \Rightarrow \cos\theta = 1 \Rightarrow r_C = \frac{\alpha}{1+\varepsilon} \Rightarrow 4000 = \frac{\alpha}{1+\varepsilon}$$

Tenemos dos ecuaciones y dos incógnitas. Dividiendo las dos ecuaciones:

$$\frac{25030.24}{4000} = \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon} \Rightarrow 25030.24 - 25030.24\varepsilon = 4000 + 4000\varepsilon \Rightarrow \varepsilon = 0.724$$

Y de cualquiera de las ecuaciones despejamos la ascensión recta:

$$4000 = \frac{\alpha}{1+\varepsilon} \Rightarrow \alpha = 4000(1+\varepsilon) = 4000(1+0.724) = 6897.70 \text{ km}$$

Por tanto la ecuación de la órbita es:

$$r = \frac{\alpha}{1+\varepsilon\cos\theta} = \frac{6897.70}{1+0.724\cos\theta}$$

$$\underline{r = \frac{6897.70}{1+0.724\cos\theta}}$$