a) Los radios de las orbitas son:

r_A=h_A+R=10000+6370=16370 km; r_B=h_B+R=5000+6370=11370 km; r_C=R=6370 km

Inicialmente el satélite está en la órbita circular externa, luego el movimiento es circular uniforme. La única fuerza que actúa es la de atracción gravitatoria, y la única aceleración es la normal o centrípeta, ambas en la dirección del radio de giro y apuntando hacia el centro de curvatura. Aplicando la segunda ley de Newton tendremos:

$$\Sigma F_n = ma_n \Rightarrow G\frac{Mm}{r_A^2} = m\frac{v_A^2}{r_A} \Rightarrow v_A = \sqrt{\frac{GM}{r_A}} = \sqrt{\frac{6.67\cdot 10^{-11}\cdot 6\cdot 10^{24}}{16370\cdot 10^3}} = 4944.41\ \mathrm{m/s}$$

Después del incremento de velocidad, el satélite se sitúa en la órbita de transición, cuyo eje mayor es:

2^a=r_A+r_B=16370+11370=27740 km

Teniendo en cuenta que la energía total es constante:

$$E_T = E_{CA} + E_{PA} \Rightarrow -G\frac{Mm}{2a} = \frac{1}{2}mv'^2_A - G\frac{Mm}{r_A}$$

$$-6.67\cdot 10^{-11}\frac{6\cdot 10^{24}}{27740\cdot 10^3} = \frac{1}{2}v'^2_A - 6.67\cdot 10^{-11}\frac{6\cdot 10^{24}}{16370\cdot 10^3} \Rightarrow v'_A = 4476.68\ \mathrm{m/s}$$

Por tanto la reducción de velocidad será:

Δv_A=v'_A-v_A=4476.68-4944.41=-467.73 m/s

<u>Δv_A=-467.73 m/s</u>

b) El período de la órbita elíptica de transición, aplicando la tercera ley de Kepler, será:

$$T = \sqrt{\frac{4\pi^2}{GM}a^3} = \sqrt{\frac{4\pi^2}{6.67\cdot 10^{-11}\cdot 6\cdot 10^{24}}\left(\frac{27740\cdot 10^3}{2}\right)^3} = 16223.93\ \mathrm{s}$$

<u>T=16223.93 s</u>

c) Podemos aplicar directamente la ecuación de la excentricidad:

$$\varepsilon = \frac{r_{máx} - r_{mín}}{r_{máx} + r_{mín}} = \frac{r_A - r_B}{r_A + r_B} = \frac{16370 - 11370}{16370 + 11370} = 0.1802$$

<u>ε=0.1802</u>

Si no nos sabemos la expresión de la excentricidad podemos obtenerla a partir de la ecuación de la cónica. Dicha ecuación es:

$$r = \frac{\alpha}{1 + \varepsilon\cos\theta}$$

donde r es el radio vector, α la ascensión recta (radio vector cuando θ=90º), ε la excentricidad y θ el ángulo que forma el radio vector con la dirección del perigeo. Conocemos dos puntos de la cónica, A y B:

$$r = r_A \Rightarrow \theta = 180^o \Rightarrow \cos\theta = -1 \Rightarrow r_A = \frac{\alpha}{1-\varepsilon}$$

$$r = r_B \Rightarrow \theta = 0^o \Rightarrow \cos\theta = 1 \Rightarrow r_B = \frac{\alpha}{1+\varepsilon}$$

Dividendo las dos expresiones:

$$\frac{r_A}{r_B} = \frac{\frac{\alpha}{1-\varepsilon}}{\frac{\alpha}{1+\varepsilon}} \Rightarrow \frac{r_A}{r_B} = \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon} \Rightarrow \frac{16370}{11370} = \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon} \Rightarrow \varepsilon = 0.1802$$

$\underline{\varepsilon=0.1802}$

d) A continuación el satélite viaja a través de la trayectoria elíptica desde A hasta B aumentando su velocidad. Para calcular la velocidad con que llega al punto B aplicamos la conservación del momento angular:

$$L_A=L_B \Rightarrow mr_A v'_A \text{sen}\varphi_A = mr_B v_B \text{sen}\varphi_B$$

siendo φ el ángulo que forma el radio vector con la velocidad. En los puntos A y B el radio vector es perpendicular a la velocidad, luego tendremos:

$$\varphi_A=\varphi_B=90^o \Rightarrow \text{sen}\varphi_A=\text{sen}\varphi_B=1 \Rightarrow mr_A v'_A \text{sen}\varphi_A = mr_B v_B \text{sen}\varphi_B \Rightarrow r_A v'_A = r_B v_B \Rightarrow v_B = \frac{r_A v'_A}{r_B} =$$

$$= \frac{16370 \cdot 4476.68}{11370} = 6445.32 \text{ m/s}$$

Después de la reducción de velocidad, el satélite queda incorporado a la órbita circular interna, luego aplicamos de nuevo la segunda ley de Newton, de idéntico modo a como lo hicimos en la órbita circular externa:

$$\Sigma F_n = ma_n \Rightarrow G\frac{Mm}{r_B^2} = m\frac{v'^2_B}{r_B} \Rightarrow v'_B = \sqrt{\frac{GM}{r_B}} = \sqrt{\frac{6.67 \cdot 10^{-11} \cdot 6 \cdot 10^{24}}{11370 \cdot 10^3}} = 5932.78 \text{ m/s}$$

Por tanto la reducción de velocidad es de:

$$\Delta v_B = v'_B - v_B = 5932.78 - 6445.32 = -512.54 \text{ m/s}$$

$\underline{\Delta v_B = -512.54 \text{ m/s}}$

e) Al pasar por el punto B la velocidad se disminuye en 2100 m/s luego tendremos que en la trayectoria de aterrizaje la velocidad será:

$$v''_B = v'_B - \Delta v'_B = 5932.78 - 2100 = 3832.78 \text{ m/s}$$

Por tanto podemos determinar el eje mayor de la cónica de aterrizaje, ya que en el punto B conocemos tanto la energía cinética como la potencial. Aplicando la conservación de la energía:

$$E'_T = E'_{CB} + E'_{PB} \Rightarrow -G\frac{Mm}{2a'} = \frac{1}{2}mv''^2_B - G\frac{Mm}{r_B}$$

$$-6.67\cdot 10^{-11}\frac{6\cdot 10^{24}}{2a'} = \frac{1}{2}3832.78^2 - 6.67\cdot 10^{-11}\frac{6\cdot 10^{24}}{11370\cdot 10^3}$$

2a=14368400 m=14368.4 km

Conocemos la distancia en el apogeo, que es r_B, luego podemos determinar la del perigeo:

$2a=r_B+r_P \Rightarrow 14368.4=11370+r_P \Rightarrow r_P=2998.4$ km

Ahora determinamos la ecuación de la cónica, que será:

$$r = \frac{\alpha'}{1+\varepsilon'\cos\theta}$$

Conocemos dos puntos de la cónica:

$$r = r_B \Rightarrow \theta = 180^o \Rightarrow \cos\theta = -1 \Rightarrow r_B = \frac{\alpha'}{1-\varepsilon'}$$

$$r = r_P \Rightarrow \theta = 0^o \Rightarrow \cos\theta = 1 \Rightarrow r_P = \frac{\alpha'}{1+\varepsilon'}$$

Dividendo las dos expresiones:

$$\frac{r_B}{r_P} = \frac{\dfrac{\alpha'}{1-\varepsilon'}}{\dfrac{\alpha'}{1+\varepsilon'}} \Rightarrow \frac{r_B}{r_P} = \frac{1+\varepsilon'}{1-\varepsilon'} \Rightarrow \frac{11370}{2998.4} = \frac{1+\varepsilon'}{1-\varepsilon'} \Rightarrow \varepsilon' = 0.5816$$

Por tanto la ascensión recta:

$$r_B = \frac{\alpha'}{1-\varepsilon'} \Rightarrow \alpha' = r_B(1-\varepsilon') = 11370(1-0.5816) = 4745.39 \text{ km}$$

La ecuación de la cónica es:

$$r = \frac{\alpha'}{1+\varepsilon'\cos\theta} = \frac{4745.69}{1+0.5816\cos\theta}$$

En el punto de aterrizaje r=R=6370 km luego sustituyendo:

$$r = \frac{4745.69}{1+0.5816\cos\theta} \Rightarrow 6370 = \frac{4745.69}{1+0.5816\cos\theta} \Rightarrow \cos\theta = -0.4385 \Rightarrow \theta = 116^o$$

<u>θ=116º</u>