a) Determinamos en primer lugar los radios, ya que nos dan las alturas. Conocemos:

$$r_B=h_B+R_T=290+6370=6660 \text{ km}$$
$$r_D=r_A=h_A+R_T=620+6370=6990 \text{ km}$$

Inicialmente el transbordador S se encuentra en una órbita circular de radio r_B. En dicha órbita el movimiento es circular y uniforme, de modo que la única fuerza que actúa es la de atracción gravitatoria (dirección radial y sentido hacia el centro de la Tierra) y la única aceleración que tiene es la centrípeta (dirección radial y sentido hacia el centro de curvatura). Aplicando pues la segunda ley de Newton tendremos:

$$\Sigma F_n = ma_n \Rightarrow F_g = ma_n \Rightarrow G\frac{Mm}{r_B^2} = m\frac{v_B^2}{r_B} \Rightarrow v_B = \sqrt{\frac{GM}{r_B}} = \sqrt{\frac{6.67\cdot 10^{-11}\cdot 6\cdot 10^{24}}{6660\cdot 10^3}} = 7751.78 \text{ m/s}$$

En B se le aumenta la velocidad en Δv_B para insertarlo en la primera órbita elíptica de transición, de modo que la nueva velocidad en ese punto será:

$$v'_B=v_B+\Delta v_B=7751.78+85=7836.78 \text{ m/s}$$

Con esta velocidad estamos en la trayectoria elíptica BC, cuyo eje mayor será 2a. Aplicando en esta órbita la conservación de la energía al punto B:

$$E_T = E_{CB} + E_{PB} \Rightarrow -G\frac{Mm}{2a} = \frac{1}{2}mv'^2_B - G\frac{Mm}{r_B} \Rightarrow -G\frac{M}{2a} = \frac{1}{2}v'^2_B - G\frac{M}{r_B}$$

$$-6.67\cdot 10^{-11}\frac{6\cdot 10^{24}}{2a} = \frac{1}{2}7836.78^2 - 6.67\cdot 10^{-11}\frac{6\cdot 10^{24}}{6660\cdot 10^3}$$

$$2a=13620337.76 \text{ m}=13620.338 \text{ km}$$

Y por diferencia podemos determinar el radio r_C:

$$2a=r_B+r_C \Rightarrow r_C=2a-r_B=13620.338-6660=6960.338 \text{ km}$$

$$\underline{r_C=6960.338 \text{ km}}$$

b) A continuación el transbordador se desplaza de B a C. Entre estos dos puntos se conserva el momento angular, luego:

$$\mathbf{L_B}=\mathbf{L_C} \Rightarrow \mathbf{r_B} \times m\mathbf{v'_B}=\mathbf{r_C} \times m\mathbf{v_C} \Rightarrow \mathbf{r_B} \times \mathbf{v'_B}=\mathbf{r_C} \times \mathbf{v_C} \Rightarrow r_B v'_B \operatorname{sen}\varphi_B=r_C v_C \operatorname{sen}\varphi_C$$

siendo φ_B y φ_C los ángulos que en cada instante forman el radio vector y la velocidad. Como los puntos B y C son los puntos extremos de la trayectoria, en dichos puntos la velocidad es perpendicular al radio vector, luego:

$$\varphi_B=\varphi_C=90^\circ \Rightarrow \operatorname{sen}\varphi_B=\operatorname{sen}\varphi_C=\operatorname{sen}90^\circ=1$$

Nos queda por tanto:

$$r_B v'_B \operatorname{sen}\varphi_B=r_C v_C \operatorname{sen}\varphi_C \Rightarrow r_B v'_B=r_C v_C \Rightarrow 6660 \cdot 7836.78=6960.338 v_C \Rightarrow v_C=7498.62 \text{ m/s}$$

A continuación se aumenta la velocidad en $\Delta v_C j$ pasando la velocidad en el punto C a ser v'_C y estando el transbordador en una segunda órbita elíptica de transición, cuyo eje mayor será 2a'. Dicho eje vale:

$$2a'=r_C+r_D=6960.338+6990=13950.338 \text{ km}$$

En esta segunda elipse aplicamos la ecuación de la energía en el punto C y tendremos:

$$E'_T = E_{CC} + E_{PC} \Rightarrow -G\frac{Mm}{2a'} = \frac{1}{2}mv'^2_C - G\frac{Mm}{r_C} \Rightarrow -G\frac{M}{2a'} = \frac{1}{2}v'^2_C - G\frac{M}{r_C}$$

$$-6.67\cdot10^{-11}\frac{6\cdot10^{24}}{13950338} = \frac{1}{2}v'^2_C - 6.67\cdot10^{-11}\frac{6\cdot10^{24}}{6960338} \Rightarrow v'_C = 7590.75 \text{ m/s}$$

Por tanto el incremento de velocidad en el punto C es:

$$\Delta v_C=v'_C-v_C=7590.75-7498.62=92.13 \text{ m/s}$$

$\underline{\Delta v_C=92.13 \text{ m/s}}$

c) Seguidamente, el transbordador se desplaza en la segunda órbita elíptica desde C hasta D. En esta trayectoria se conserva el momento angular luego:

$$\mathbf{L_C}=\mathbf{L_D} \Rightarrow \mathbf{r_C} \times m\mathbf{v'_C}=\mathbf{r_D} \times m\mathbf{v_D} \Rightarrow \mathbf{r_C} \times \mathbf{v'_C}=\mathbf{r_D} \times \mathbf{v_D} \Rightarrow r_C v'_C \operatorname{sen}\varphi_C=r_D v_D \operatorname{sen}\varphi_D$$

siendo φ_C y φ_D los ángulos que forman el radio vector y la velocidad. Como los puntos C y D son también los extremos de la trayectoria, en dichos puntos la velocidad es perpendicular al radio vector, luego tendremos como antes:

$$\varphi_C=\varphi_D=90^\circ \Rightarrow \operatorname{sen}\varphi_C=\operatorname{sen}\varphi_D=\operatorname{sen}90^\circ=1$$

Nos queda por tanto:

$$r_C v'_C \operatorname{sen}\varphi_C=r_D v_D \operatorname{sen}\varphi_D \Rightarrow r_C v'_C=r_D v_D \Rightarrow 6960.338 \cdot 7590.75=6990 v_D \Rightarrow v_D=7558.54 \text{ m/s}$$

Por último, en el punto D se produce un incremento de velocidad y el transbordador queda insertado en la trayectoria circular externa con velocidad v'_D. En dicha trayectoria se verifica lo mismo que explicamos en la primera órbita circular, de modo que podemos decir:

$$\Sigma F_n = ma_n \Rightarrow F_g = ma_n \Rightarrow G\frac{Mm}{r_D^2} = m\frac{v'^2_D}{r_D} \Rightarrow v'_D = \sqrt{\frac{GM}{r_D}} = \sqrt{\frac{6.67\cdot10^{-11}\cdot6\cdot10^{24}}{6990\cdot10^3}} = 7566.59 \text{ m/s}$$

El incremento de velocidad en el punto D será por tanto:

$$\Delta v_D=v'_D-v_D=7566.59-7558.54=8.05 \text{ m/s}$$

$\underline{\Delta v_D=8.05 \text{ m/s}}$

d) Teniendo en cuenta la tercera ley de Kepler:

$$T'^2 = \frac{4\pi^2}{GM}a'^3 \Rightarrow T' = \sqrt{\frac{4\pi^2}{GM}a'^3} = \sqrt{\frac{4\pi^2}{6.67\cdot10^{-11}\cdot6\cdot10^{24}}\left(\frac{13950338}{2}\right)^3} = 5785.93 \text{ s}$$

$\underline{T'=5785.93 \text{ s}}$

e) El transbordador y el satélite parten simultáneamente de los puntos C y A respectivamente, y deben llegar a la vez al punto D. Por tanto, el tiempo que tarda el transbordador en ir desde C hasta D (que será la mitad del período, puesto que el radio vector barre media elipse) tiene que ser el mismo que el que tarda el satélite en ir desde A hasta D (es decir, en recorrer el ángulo φ). Así pues, tendremos que para el satélite:

$$v_A = v'_D = \omega r_D \Rightarrow \omega = \frac{v'_D}{r_D} \Rightarrow \frac{\varphi}{t_{AD}} = \frac{v'_D}{r_D} \Rightarrow \varphi = \frac{v'_D\, t_{AD}}{r_D} = \frac{v'_D\, T'}{2r_D} = \frac{7566.59 \cdot 5785.93}{2 \cdot 6990 \cdot 10^3} =$$

$$=3.132 \text{ rad}=179.43^{o}$$

$\underline{\varphi=179.43^{o}}$