a) El enunciado nos da los diámetros de las barras, de modo que los radios serán justamente la mitad:

$$d_{acero}=d_{latón}=12\text{ cm} \Rightarrow r_{acero}=r_{latón}=6\text{ cm}=0.06\text{ m}$$

El volumen de cualquiera de las barras, puesto que son cilíndricas, será:

$$V=\pi r^2 l$$

Por tanto, derivando, la variación de volumen es:

$$\Delta V=2\pi r l\Delta r+\pi r^2\Delta l$$

Si dividimos por el volumen inicial de la barra:

$$\frac{\Delta V}{V}=\frac{2\pi r l\Delta r}{V}+\frac{\pi r^2\Delta l}{V} \Rightarrow \frac{\Delta V}{V}=\frac{2\pi r l\Delta r}{\pi r^2 l}+\frac{\pi r^2\Delta l}{\pi r^2 l} \Rightarrow \frac{\Delta V}{V}=2\frac{\Delta r}{r}+\frac{\Delta l}{l}$$

De la expresión del coeficiente de Poisson:

$$\mu=-\frac{\Delta r/r}{\Delta l/l} \Rightarrow \frac{\Delta r}{r}=-\mu\frac{\Delta l}{l}$$

Sustituyendo esto en la ecuación anterior:

$$\frac{\Delta V}{V}=2\frac{\Delta r}{r}+\frac{\Delta l}{l} \Rightarrow \frac{\Delta V}{V}=-2\mu\frac{\Delta l}{l}+\frac{\Delta l}{l} \Rightarrow \frac{\Delta V}{V}=\frac{\Delta l}{l}(1-2\mu) \Rightarrow \Delta l=\frac{l\Delta V}{V(1-2\mu)}=$$

$$=\frac{l\Delta V}{\pi r^2 l(1-2\mu)}=\frac{\Delta V}{\pi r^2(1-2\mu)}$$

Aplicando esta ecuación a la barra de latón:

$$\Delta l_{latón}=\frac{\Delta V_{latón}}{\pi r_{latón}^2(1-2\mu_{latón})}=\frac{2.25\cdot 10^{-9}}{\pi\cdot 0.06^2(1-2\cdot 0.37)}=7.652\cdot 10^{-7}\text{ m}$$

Teniendo en cuenta que las barras están en serie, el alargamiento total tiene que ser la suma de los dos alargamientos. Así pues, por diferencia podemos determinar el alargamiento que sufre la barra de acero:

$$\Delta l=\Delta l_{acero}+\Delta l_{latón} \Rightarrow \Delta l_{acero}=\Delta l-\Delta l_{latón}=10^{-6}-7.652\cdot 10^{-7}=2.348\cdot 10^{-7}\text{ m}$$

Podemos determinar ya el esfuerzo a que está sometida la barra de acero:

$$E_{acero}=\frac{\sigma_{acero}}{\varepsilon_{acero}} \Rightarrow \sigma_{acero}=E_{acero}\varepsilon_{acero}=E_{acero}\frac{\Delta l_{acero}}{l_{acero}}=$$

$$=20\cdot 10^{10}\frac{2.348\cdot 10^{-7}}{2}=23483.2\text{ N/m}^2$$

$$\underline{\sigma_{acero}=23483.2\text{ N/m}^2}$$

que a su vez es el mismo esfuerzo al que está sometida la barra de latón puesto que la fuerza es la misma para las dos barras y tienen la misma sección.

$$\underline{\sigma_{latón}=23483.2\ N/m^2}$$

La fuerza será:

$$\sigma_{acero}=\frac{F}{S_{acero}}=\sigma_{latón}=\frac{F}{S_{latón}}\Rightarrow F=\sigma_{acero}S_{acero}=\sigma_{acero}\pi r_{acero}^2=23483.2\cdot\pi\cdot 0.06^2=265.589\ N$$

$$\underline{F=265.589\ N}$$

Por último, el módulo de Young del latón será:

$$E_{latón}=\frac{\sigma_{latón}}{\varepsilon_{latón}}=\frac{\sigma_{latón}}{\Delta l_{latón}/l_{latón}}=\frac{23483.2}{7.652\cdot 10^{-7}/1}=3.0689\cdot 10^{10}\ N/m^2$$

$$\underline{E_{latón}=3.0689\cdot 10^{10}\ N/m^2}$$

b) Los alargamientos ya los habíamos determinado en el apartado anterior:

$$\underline{\Delta l_{acero}=2.348\cdot 10^{-7}\ m}$$
$$\underline{\Delta l_{latón}=7.652\cdot 10^{-7}\ m}$$

En cuanto al incremento total del conjunto, será la suma del incremento de volumen de la barra de acero y el incremento de volumen de la barra de latón. La variación de volumen de la barra de latón la conocemos. En cuanto a la de latón tendremos, aplicando las ecuaciones iniciales:

$$\frac{\Delta V_{acero}}{V_{acero}}=\frac{\Delta l_{acero}}{l_{acero}}(1-2\mu_{acero})\Rightarrow\Delta V_{acero}=V_{acero}\frac{\Delta l_{acero}}{l_{acero}}(1-2\mu_{acero})=$$
$$=\pi r_{acero}^2 l_{acero}\frac{\Delta l_{acero}}{l_{acero}}(1-2\mu_{acero})=\pi r_{acero}^2\Delta l_{acero}(1-2\mu_{acero})=$$
$$=\pi\cdot 0.060^2\cdot 2.348\cdot 10^{-7}(1-2\cdot 0.28)=1.1684\cdot 10^{-9}\ m^3$$

Por tanto la variación total de volumen:

$$\Delta V=\Delta V_{acero}+\Delta V_{latón}=1.1684\cdot 10^{-9}+2.25\cdot 10^{-9}=3.418\cdot 10^{-9}\ m^3$$

$$\underline{\Delta V=3.418\cdot 10^{-9}\ m^3}$$

c) En primer lugar vamos a determinar la velocidad de propagación del sonido en los dos gases a la temperatura de la experiencia. La relación entre la velocidad de propagación de ondas longitudinales en un gas y la temperatura es:

$$v=\sqrt{\frac{\gamma RT}{M}}$$

siendo $\gamma$ el coeficiente adiabático del gas, R la constante de los gases perfectos, T la temperatura y M la masa molecular del gas. Para un mismo gas a dos temperaturas diferentes tendremos:

$$v=\sqrt{\frac{\gamma RT}{M}};\ v'=\sqrt{\frac{\gamma RT'}{M}}$$

Por tanto dividiendo las dos expresiones:

$$\frac{v}{v'} = \frac{\sqrt{\frac{\gamma RT}{M}}}{\sqrt{\frac{\gamma RT'}{M}}} = \sqrt{\frac{T}{T'}} \Rightarrow v = v'\sqrt{\frac{T}{T'}}$$

Por tanto vemos que conociendo la velocidad a una temperatura T' podemos determinar la velocidad a otra temperatura T. En nuestro caso conocemos la velocidad a la temperatura T'=0ºC=273 K y queremos determinarla a T=30ºC=303 K. Para el tubo que contiene hidrógeno tendremos pues:

$$v_{H2} = v'_{H2}\sqrt{\frac{T}{T'}} = 1139\sqrt{\frac{303}{273}} = 1200 \text{ m/s}$$

Y para el tubo que contiene helio:

$$v_{He} = v'_{He}\sqrt{\frac{T}{T'}} = 911.24\sqrt{\frac{303}{273}} = 960 \text{ m/s}$$

El tubo que contiene hidrógeno es un tubo cerrado por ambos extremos luego en ellos habrá nodos, de modo que para que se produzcan en él ondas estacionarias su longitud tiene que ser un número entero de semilongitudes de onda:

$$l_{H2} = N\frac{\lambda_{H2}}{2} = N\frac{v_{H2}}{2\nu} \Rightarrow \nu = N\frac{v_{H2}}{2l_{H2}}$$

En el caso del tubo que contiene helio, se trata de un tubo cerrado por un extremo donde habrá un nodo y abierto por el otro donde habrá un antinodo, de modo que su longitud tiene que ser un número impar de $\frac{\lambda_{He}}{4}$:

$$l_{He} = I\frac{\lambda_{He}}{4} = I\frac{v_{He}}{4\nu} \Rightarrow \nu = I\frac{v_{He}}{4l_{He}}$$

Como la fuente que proporciona la frecuencia es única, igualamos las frecuencias:

$$N\frac{v_{H2}}{2l_{H2}} = I\frac{v_{He}}{4l_{He}} \Rightarrow N\frac{v_{H2}}{l_{H2}} = I\frac{v_{He}}{2l_{He}} \Rightarrow N = I\frac{v_{He}l_{H2}}{2v_{H2}l_{He}} = I\frac{960 \cdot 2}{2 \cdot 1200 \cdot 1} = 0.8I \Rightarrow N = 0.8I$$

Por tanto en ambos tubos se producirán ondas estacionarias siempre que los números entero e impar cumplan la relación N=0.8I. Lógicamente hay infinitas parejas de números que cumplen esta relación. Entre ellas, nos interesa aquélla que hace que la frecuencia sea mínima, es decir, los números más bajos posible. Para hallarlos, vamos dando valores impares a I (empezando por el más pequeño) hasta que N sea un número entero. La solución del problema será la primera pareja de números impar y entero que verifique esa relación. Haciendo una tabla tendremos:

| | | | |
|---|---|---|---|
| I | 1 | 3 | 5 |
| N | 0.8 | 2.4 | 4 |

Hemos determinado ya la pareja. Sustituyendo en cualquiera de las expresiones de la frecuencia:

$$\nu = N\frac{v_{H2}}{2l_{H2}} = 4\frac{1200}{2\cdot 2} = 1200\ \text{Hz}$$

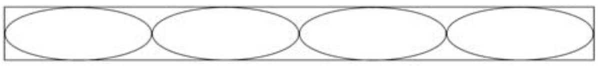
<u>ν=1200 Hz</u>

En el tubo de hidrógeno tendremos que N=1 corresponde al tono fundamental, N=2 al primer armónico, N=3 al segundo armónico y N=4 al tercer armónico.

<u>TUBO DE HIDRÓGENO: TERCER ARMÓNICO</u>

En cuando al tubo de helio, I=1 corresponde al tono fundamental, I=3 al primer armónico e I=5 al segundo armónico:

<u>TUBO DE HELIO: SEGUNDO ARMÓNICO</u>



d) Vemos ahora las posiciones de los nodos. En el tubo de hidrógeno tenemos el tercer armónico. Podemos ver en la figura que los nodos se encuentran separados por una distancia de $\frac{\lambda_{H2}}{2}$ a partir del extremo izquierdo del tubo. La longitud de onda en el tubo de hidrógeno será:

$$l_{H2} = N\frac{\lambda_{H2}}{2} \Rightarrow \lambda_{H2} = \frac{2l_{H2}}{N} = \frac{2\cdot 2}{4} = 1\ \text{m} \Rightarrow \frac{\lambda_{H2}}{2} = \frac{1}{2} = 0.5\ \text{m}$$

Por tanto los nodos se encuentran separados por 0.5 m empezando desde el extremo izquierdo. Sus posiciones serán:

<u>$x_{H2}$=0 m, 0.5 m, 1 m, 1.5 m, 2 m</u>

Para el tubo de helio tendremos lo mismo, el primer nodo en el extremo izquierdo y los demás separados por $\frac{\lambda_{He}}{2}$, siendo la longitud de onda en el helio:

$$l_{He} = I\frac{\lambda_{He}}{4} \Rightarrow \lambda_{He} = \frac{4l_{He}}{I} = \frac{4\cdot 1}{5} = 0.8\ \text{m} \Rightarrow \frac{\lambda_{He}}{2} = \frac{0.8}{2} = 0.4\ \text{m}$$

Las posiciones de los nodos en este tubo serán:

<u>$x_{He}$=0 m, 0.4 m, 0.8 m</u>