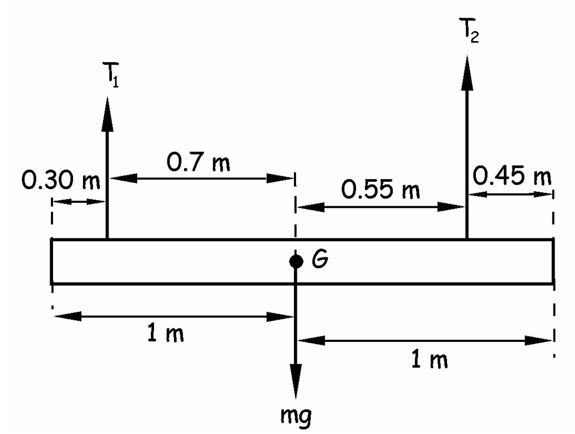


a) Para determinar los incrementos de longitud necesitamos la tensión a que está sometido cada hilo. Para ello trazamos el diagrama de sólido libre de la barra. Como el sistema está en equilibrio la suma de fuerzas debe ser nula:

$$\Sigma F_Y=0 \Rightarrow T_1+T_2-mg=0$$
$$T_1+T_2=mg \Rightarrow T_1+T_2=40 \cdot 9.8 \Rightarrow$$
$$T_1+T_2=392 \text{ N}$$

Además, la suma de momentos también será nula; por comodidad tomaremos momentos respecto del centro de masas:

$$\Sigma M_G=0 \Rightarrow T_2 \cdot 0.55-T_1 \cdot 0.7=0 \Rightarrow T_2 = \frac{0.7}{0.55}T_1 = 1.273T_1$$

Sustituyendo esta expresión de T_2 en la ecuación de fuerzas:

$$T_1+T_2=392 \text{ N} \Rightarrow T_1+1.273T_1=392 \Rightarrow T_1=172.48 \text{ N}$$

Y la otra tensión :

$$T_2=1.273T_1=1.273 \cdot 172.48=219.52 \text{ N}$$

Podemos obtener ahora los alargamientos en cada hilo a través del módulo de Young:

$$E = \frac{T/S}{\Delta l/l} \Rightarrow \Delta l = \frac{Tl}{ES} = \frac{Tl}{E\pi r^2} = \frac{Tl}{E\pi\left(\frac{d}{2}\right)^2} = \frac{4Tl}{E\pi d^2}$$

Para el hilo 1:

$$\Delta l_1 = \frac{4T_1 l}{E\pi d_1^2} = \frac{4 \cdot 172.48 \cdot 3}{6 \cdot 10^{10} \cdot \pi \cdot (10^{-3})^2} = 0.01098 \text{ m} = 10.98 \text{ mm}$$

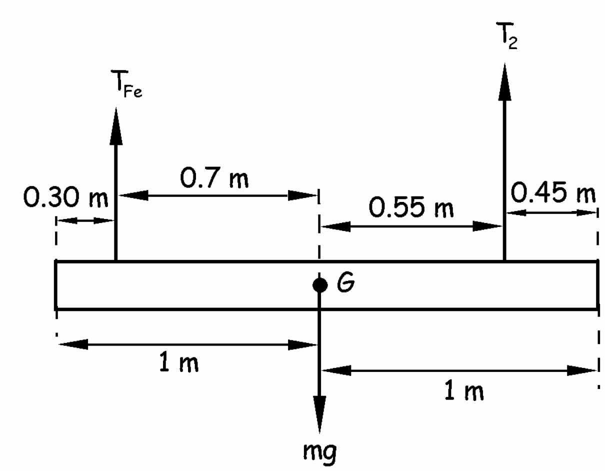
<u>Δl_1=10.98 mm</u>

Y para el hilo 2:

$$\Delta l_2 = \frac{4T_2 l}{E\pi d_2^2} = \frac{4 \cdot 219.52 \cdot 3}{6 \cdot 10^{10} \cdot \pi \cdot (2 \cdot 10^{-3})^2} = 3.49 \cdot 10^{-3} \text{ m} = 3.49 \text{ mm}$$

<u>Δl_2=3.49 mm</u>

b) Llamaremos ahora T_{Fe} a la tensión que soporta la parte del hilo que está formada por la aleación de hierro (que estará en contacto con la barra de 40 kg) y T_{Cu} a la tensión que soporta la parte del hilo 1 compuesta de cobre. Si hacemos un diagrama de sólido libre de la barra ahora vemos que tenemos exactamente lo mismo que antes, excepto por los nombres, de modo que obtendríamos, igual que antes:



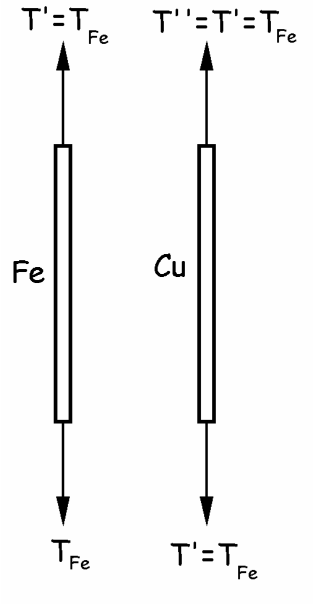
$T_{Fe}=T_1=172.48$ N
$T_2=219.52$ N

Como los parámetros del hilo 2 son los mismos, se alargaría lo mismo que antes. Puesto que el hilo 1 se alarga el doble del hilo 2:

$\Delta l_1=2\Delta l_2=2 \cdot 3.49 \cdot 10^{-3}=6.98 \cdot 10^{-3}$ m

Nos centramos por tanto en el hilo 1.

Si aislamos las dos partes de este hilo, la de cobre y la de la aleación de hierro, podemos ver fácilmente que puesto que el sistema está en equilibrio, la tensión que soportan las dos partes del hilo es exactamente la misma, y será:



$T=T_{Fe}=172.48$ N

Además, puesto que la tensión es la misma en las dos partes del hilo y la misma que en el apartado anterior habríamos obtenido exactamente el mismo resultado si hubiéramos considerado que la parte en contacto con la barra es la parte del cobre.

Como estos hilos están en serie tendremos que:

$$\Delta l_1=\Delta l_{Fe}+\Delta l_{Cu}$$

Y a partir del módulo de Young:

$$\Delta l_1 = \frac{4T_{Fe}l_{Fe}}{E_{Fe}\pi d_{Fe}^2} + \frac{4T_{Cu}l_{Cu}}{E_{Cu}\pi d_{Cu}^2}$$

Teniendo en cuenta que: $T_{Fe}=T_{Cu}=T=172.48$ N

$l_{Fe}=l_{Cu}=l=1.5$ m ; $d_{Fe}=d_{Cu}=d=1$ mm$=10^{-3}$ m

Podemos poner:

$$\Delta l_1 = \frac{4Tl}{E_{Fe}\pi d^2} + \frac{4Tl}{E_{Cu}\pi d^2} \Rightarrow \Delta l_1 = \frac{4Tl}{\pi d^2}\left(\frac{1}{E_{Fe}} + \frac{1}{E_{Cu}}\right)$$

$$\frac{1}{E_{Fe}} + \frac{1}{E_{Cu}} = \frac{\pi \Delta l_1 d^2}{4Tl} \Rightarrow \frac{1}{E_{Fe}} = \frac{\pi \Delta l_1 d^2}{4Tl} - \frac{1}{E_{Cu}} = \frac{\pi \cdot 6.98 \cdot 10^{-3} \cdot (10^{-3})^2}{4 \cdot 172.48 \cdot 1.5} - \frac{1}{6 \cdot 10^{10}} =$$

$$=4.523 \cdot 10^{-12} \text{ m}^2/\text{N} \Rightarrow E_{Fe}=2.211 \cdot 10^{11} \text{ N/m}^2$$

$$\underline{E_{Fe}=2.211 \cdot 10^{11} \text{ N/m}^2}$$

c) Ahora cualquiera de los dos hilos está sometido a una tensión de:

$T=80$ kg$=784$ N

Comencemos por el hilo 1, que está formado por 1.5 m de cobre y 1.5 m de aleación de hierro. Puesto que se forman ondas estacionarias en él, tendrá que haber nodo en los dos extremos del hilo. Además, como el punto de unión de los materiales también debe ser un nodo, cada una de las mitades de este hilo por separado debe cumplir la condición de ondas estacionarias en un alambre tenso. Cada mitad del alambre verificará la ecuación:

$$l = n\frac{\lambda}{2}$$

siendo n un número entero. Teniendo en cuenta que se trata de ondas transversales tendremos:

$$l = n\frac{\lambda}{2} \Rightarrow l = n\frac{v}{2\nu} \Rightarrow \nu = \frac{nv}{2l} = \frac{n}{2l}\sqrt{\frac{T}{\mu}} = \frac{n}{2l}\sqrt{\frac{T}{\rho S}} = \frac{n}{2l}\sqrt{\frac{T}{\rho\pi r^2}} =$$

$$= \frac{n}{2l}\sqrt{\frac{T}{\rho\pi\left(\frac{d}{2}\right)^2}} = \frac{n}{2l}\sqrt{\frac{4T}{\rho\pi d^2}}$$

Como esto se verifica para cada mitad del alambre:

$$\nu = \frac{n_{Fe}}{2l}\sqrt{\frac{4T}{\rho_{Fe}\pi d^2}}$$

$$\nu = \frac{n_{Cu}}{2l}\sqrt{\frac{4T}{\rho_{Cu}\pi d^2}}$$

Si la frecuencia es la misma:

$$\frac{n_{Fe}}{2l}\sqrt{\frac{4T}{\rho_{Fe}\pi d^2}} = \frac{n_{Cu}}{2l}\sqrt{\frac{4T}{\rho_{Cu}\pi d^2}} \Rightarrow n_{Fe}\sqrt{\frac{1}{\rho_{Fe}}} = n_{Cu}\sqrt{\frac{1}{\rho_{Cu}}} \Rightarrow n_{Fe} = n_{Cu}\sqrt{\frac{\rho_{Fe}}{\rho_{Cu}}} =$$

$$= n_{Cu}\sqrt{\frac{8330}{3000}} = 1.666 n_{Cu} \Rightarrow n_{Fe} = 1.666 n_{Cu}$$

Podemos ver que la frecuencia depende de n, de modo que la frecuencia más baja será aquélla que corresponda a n más bajo, habida cuenta que n tiene que ser un número entero y verificar la ecuación que acabamos de obtener. Tendremos que ir dando valores enteros a n_{Cu} hasta obtener el entero más bajo n_{Fe}; tendremos pues:

n_{Cu}	1	2	3
n_{Fe}	1.666	3.333	5

La primera pareja de enteros que cumple la relación dada, y que por tanto nos da la frecuencia más baja en las condiciones del problema es:

$n_{Cu}=3$; $n_{Fe}=5$

Sustituyendo cualquiera de ellas en la expresión de la frecuencia:

$$\nu = \frac{n_{Cu}}{2l}\sqrt{\frac{4T}{\rho_{Cu}\pi d^2}} = \frac{3}{2\cdot 1.5}\sqrt{\frac{4\cdot 784}{3000\cdot\pi\cdot(10^{-3})^2}} = 576.84\ s^{-1}$$

Se puede comprobar que el mismo resultado obtendríamos con la aleación de hierro.

$\underline{\nu=576.84\ s^{-1}}$

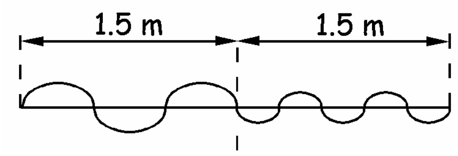
Ahora vamos al hilo 2, formado únicamente por cobre. Se forman en él ondas estacionarias transversales, de modo que la frecuencia de vibración será:

$$\nu' = \frac{n_2}{2l_2}\sqrt{\frac{4T}{\rho_{Fe}\pi d^2}}$$

Vemos que como la frecuencia depende solamente de n, el valor más bajo de la frecuencia será el correspondiente al valor más bajo de n, es decir, el tono fundamental:

$$\nu' = \frac{n_2}{2l_2}\sqrt{\frac{4T}{\rho_{Cu}\pi d^2}} = \frac{1}{2l_2}\sqrt{\frac{4T}{\rho_{Cu}\pi d^2}} = \frac{1}{2\cdot 3}\sqrt{\frac{4\cdot 784}{3000\cdot\pi\cdot(2\cdot 10^{-3})^2}} = 48.07\ \mathrm{s}^{-1}$$

$$\underline{\nu' = 48.07\ \mathrm{s}^{-1}}$$



d) Empecemos por el hilo 1. Lo que hemos denominado n es el número de semilongitudes de onda que hay en cada parte, es decir, tenemos 3 $\frac{\lambda}{2}$ en el cobre y 5 $\frac{\lambda}{2}$ en la aleación de hierro, lo que quiere decir que contando los extremos tendremos en dicho hilo 9 nodos.

$$\underline{n_{nodos} = 9}$$

Como la longitud de onda varía al cambiar de material los nodos no tendrán el mismo espaciado en el cobre que en la aleación. En la parte del cobre tenemos 3 $\frac{\lambda}{2}$, luego la distancia entre nodos será:

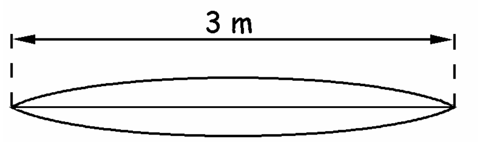
$$\Delta x_{Cu} = \frac{1.5}{3} = 0.5\ \mathrm{m}$$

Sin embargo en la parte correspondiente a la aleación tenemos 5 $\frac{\lambda}{2}$ luego el espaciado entre los nodos en este tramo será:

$$\Delta x_{Fe} = \frac{1.5}{5} = 0.3\ \mathrm{m}$$

Así, teniendo en cuenta esto, los nueve nodos estarán en las posiciones:

$$\underline{x_{nodos} = 0,\ 0.5,\ 1.0,\ 1.5,\ 1.8,\ 2.1,\ 2.4,\ 2.7,\ 3.0\ \mathrm{m}}$$



En cuanto al hilo 2, éste vibra con el tono fundamental, de modo que sólo existen nodos en los extremos:

$$\underline{n_{nodos} = 2}$$

Sus posiciones serán entonces:

$$\underline{x_{nodos} = 0,\ 3.0\ \mathrm{m}}$$