a) Nos centramos en primer lugar en la cuerda tensa. En una cuerda tensa, se forman ondas estacionarias cuando la longitud de la cuerda es un número entero de semilongitudes de onda:

$$l = n\frac{\lambda}{2} = n\frac{v}{2\nu} \Rightarrow \nu = n\frac{v}{2l}$$

siendo n un número entero. Para el sonido fundamental:

$$n = 1 \Rightarrow \nu_0 = n\frac{v}{2l} = \frac{v}{2l}$$

Puesto que se trata de una cuerda tensa la velocidad de propagación de las ondas en la misma será:

$$v = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$$

siendo T la tensión a la que está sometida la cuerda y μ la densidad lineal de ésta (masa por unidad de longitud). Si trabajamos con todo en el Sistema Internacional:

$$v = \sqrt{\frac{T}{\mu}} = \sqrt{\frac{Tl}{m}} = \sqrt{\frac{73.47 \cdot 9.8 \cdot 2}{0.1}} = 120\ m/s$$

Por tanto la frecuencia del sonido fundamental es:

$$\nu_0 = \frac{v}{2l} = \frac{120}{2 \cdot 2} = 30\ s^{-1}$$

$\underline{\nu_0 = 30\ s^{-1}}$

b) Puesto que la energía cinética del alambre sólo depende de la velocidad de vibración de sus partículas (suponiendo que la masa del alambre se mantiene constante) la energía cinética máxima será la que se corresponda con la máxima velocidad de vibración. La posición de las partículas del alambre viene dada por:

$$y = A\,sen(\omega t - kx)$$

donde A representaría la amplitud del movimiento (A=2 cm=0.02 m), ω la frecuencia angular ($\omega = 2\pi\nu$) y k el número de ondas. La velocidad de vibración de las partículas será por tanto, derivando respecto del tiempo:

$$v = \frac{dy}{dt} = A\omega \cos(\omega t - kx)$$

Como la amplitud y la frecuencia angular son constantes, la velocidad será máxima cuando el término coseno sea máximo, es decir, cuando su valor sea la unidad:

$$v=v_{máx} \Rightarrow cos(\omega t\text{-}kx)=0 \Rightarrow v_{máx}=A\omega=A2\pi\nu=0.02 \cdot 2\pi \cdot 30=3.77 \text{ m/s}$$

Por tanto la energía cinética máxima será:

$$E_{Cmáx}=\frac{1}{2}mv_{máx}^2=\frac{1}{2}0.1\cdot3.77^2=0.71\text{ J}$$

$$\underline{E_{Cmáx}=0.71\text{ J}}$$

c) La frecuencia de emisión del generador es 60 veces la fundamental de la cuerda:

$$\nu=60\nu_0=60 \cdot 30=1800 \text{ s}^{-1}$$

Ahora tenemos un problema de efecto Doppler con reflexión en el suelo y con el medio (aire) en movimiento. Además tendremos que tener en cuenta que conocemos la velocidad del sonido en aire a 10°C, mientras que las condiciones de la experiencia son 18°C. La relación entre la velocidad y la temperatura es:

$$v=\sqrt{\frac{\gamma RT}{M}}$$

siendo γ el coeficiente adiabático del gas, R la constante de los gases perfectos, T la temperatura y M la masa molecular del gas. Por tanto, para dos temperaturas distintas y teniendo en cuenta que se trata del mismo gas (aire):

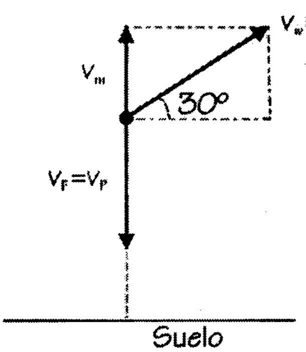
$$v_{10}=\sqrt{\frac{\gamma RT_{10}}{M}};\quad v_{18}=\sqrt{\frac{\gamma RT_{18}}{M}}$$

Dividimos las dos expresiones:

$$\frac{v_{10}}{v_{18}}=\sqrt{\frac{T_{10}}{T_{18}}}\Rightarrow v_{18}=v_{10}\sqrt{\frac{T_{18}}{T_{10}}}=340\sqrt{\frac{18+273}{10+273}}=344.77\text{ m/s}$$

Ya conocemos la velocidad del sonido en las condiciones que nos dan (velocidad de propagación de las ondas):

$$v=v_{18}=344.77 \text{ m/s}$$



Ahora tenemos lo que aparece en la figura. En primer lugar la paracaidista emite un sonido de frecuencia ν que es percibido por el suelo con frecuencia ν'. Aplicando las ecuaciones del efecto Doppler:

$$\nu'=\nu\frac{v-v_{o/m}}{v-v_{F/m}}$$

donde ν es la frecuencia emitida, ν' la percibida, v la velocidad de propagación de las ondas, $v_{o/m}$ la velocidad del observador (suelo) respecto del medio (aire) y $v_{F/m}$ la velocidad de la fuente (paracaidista) respecto del medio. Tendremos que tomar como sentido positivo el que va de la fuente al observador, y además tendremos que proyectar todo sobre la recta que une la fuente con el observador. Así tendremos:

$$\nu'=\nu\frac{v-v_{o/m}}{v-v_{F/m}}=\nu\frac{v-v_o+v_m}{v-v_F+v_m}=\nu\frac{v-v_w sen30}{v-v_P-v_w sen30}$$

A continuación el sonido rebota en el suelo y llega de nuevo a la paracaidista. Podemos considerar que ahora el suelo es la fuente, que emite un sonido de frecuencia ν' (el que ha recibido) y el observador sería la paracaidista que percibe una frecuencia ν''. Tendremos que invertir el criterio de signos, ya que será positivo el sentido desde la fuente (suelo) al observador (paracaidista). Tendremos pues, aplicando de nuevo la ecuación del efecto Doppler:

$$\nu'' = \nu' \frac{v - v_{o/m}}{v - v_{F/m}} = \nu' \frac{v - v_o + v_m}{v - v_F + v_m} = \nu \frac{v - v_w sen30}{v - v_P - v_w sen30} \cdot \frac{v + v_P + v_w sen30}{v + v_w sen30}$$

Sabemos ahora que la paracaidista percibe 100 pulsaciones/s. Las pulsaciones serán la diferencia entre la frecuencia emitida y la percibida:

$$\nu_{pulsaciones} = \nu'' - \nu \Rightarrow \nu_{pulsaciones} = \nu \frac{v - v_w sen30}{v - v_P - v_w sen30} \cdot \frac{v + v_P + v_w sen30}{v + v_w sen30} - \nu$$

Sustituyendo todo lo que conocemos:

$$100 = 1800 \frac{344.77 - 2sen30}{344.77 - v_P - 2sen30} \cdot \frac{344.77 + v_P + 2sen30}{344.77 + 2sen30} - 1800$$

$$1.0617 = \frac{345.77 + v_P}{343.77 - v_P} \Rightarrow 364.98 - 1.0617 v_P = 345.77 + v_P \Rightarrow v_P = 9.32\ m/s$$

<u>v_P=9.32 m/s</u>

d) La frecuencia de las ondas que se reflejan en el suelo será ν':

$$\nu' = \nu \frac{v - v_w sen30}{v - v_P - v_w sen30} = 1800 \frac{344.77 - 2sen30}{344.77 - 9.32 - 2sen30} = 1850.15\ s^{-1}$$

<u>ν'=1850.15 s^{-1}</u>