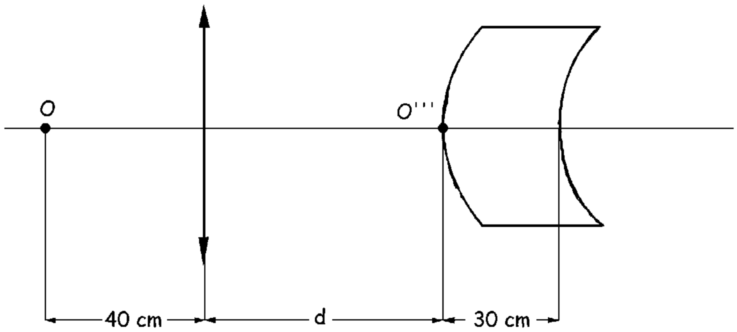
a) Tendremos el sistema que aparece en la figura. Conocemos el objeto O, situado a 40 cm de la lente, y la imagen final, que llamaremos O''', que se forma justo en la primera cara de la lámina de vidrio. Puesto que la lente es biconvexa, será convergente. Su focal valdrá:

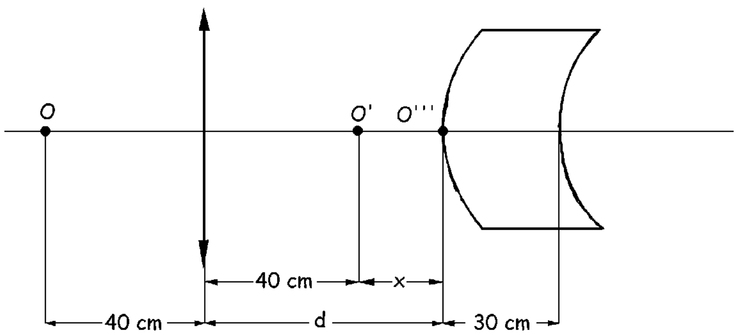


$$f' = \frac{1}{P} = \frac{1}{5} = 0.2 \text{ m} = 20 \text{ cm}$$

Lo primero que actúa por tanto será la lente convergente. Para ella el objeto es O y la imagen será O'. Para dicha lente:

$$-\frac{1}{S} + \frac{1}{S'} = \frac{1}{f'} \Rightarrow -\frac{1}{-40} + \frac{1}{S'} = \frac{1}{20} \Rightarrow S' = 40 \text{ cm}$$

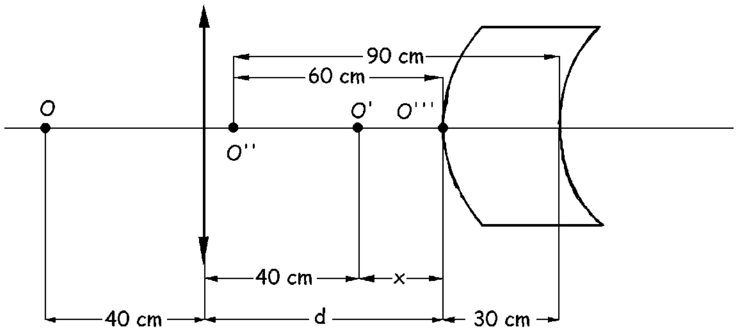
La imagen dada por la lente se forma a la derecha de la misma y a 40 cm de ella. Suponemos que dicha imagen se encuentra entre la lente convergente y la primera cara de la lámina de vidrio (el signo de los resultados nos dirá si esto es correcto).



A continuación vamos a la imagen final, que estará dada por la segunda cara de la lámina de vidrio. Para esta lámina la imagen es O''' y el objeto será O'' (desconocida). Aplicamos el invariante de Abbe a esta cara de la lámina, teniendo en cuenta que se pasa del vidrio al aire. Llamamos n al índice de refracción del aire (n=1) y n' al índice de refracción de la lámina (n'=1.5). Tendremos pues:

$$n'\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{S_2}\right) = n\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{S'_2}\right) \Rightarrow 1.5\left(\frac{1}{30} - \frac{1}{S_2}\right) = 1\left(\frac{1}{30} - \frac{1}{-30}\right) \Rightarrow S'_2 = -90 \text{ cm}$$

El objeto de dicha cara de la lámina, O'', está a la izquierda de la lámina y a 90 cm de ella. Dado que el espesor de la lámina es de 30 cm, la distancia desde O'' hasta la primera cara de la lámina será de 60 cm. Supondremos además que O’’ se encuentra entre la lente y la primera cara de la lámina.



Nos quedaría sólo resolver la primera cara de la lámina, para la que conocemos la imagen, O’’, situada a 60 cm de dicha cara, pero no el objeto, que se encuentra a una distancia x. Tampoco conocemos el radio de curvatura de la cara, por lo que al plantear el invariante de Abbe a esta cara tendríamos una ecuación y dos incógnitas. Tenemos que determinar primero una de estas incógnitas.

Sabemos sin embargo que la imagen final es invertida y del mismo tamaño que el objeto, luego el aumento lateral (relación entre el tamaño de la imagen y el tamaño del objeto) valdrá:

$$\beta=-1$$

El aumento lateral lo podemos escribir también como:

$$\beta = \beta_{lente}\beta_1\beta_2 \Rightarrow \beta = \left(\frac{S'}{S}\right)\left(\frac{nS'_1}{n'S_1}\right)\left(\frac{n'S'_2}{nS_2}\right) \Rightarrow \beta = \left(\frac{S'}{S}\right)\left(\frac{S'_1}{S_1}\right)\left(\frac{S'_2}{S_2}\right) \Rightarrow -1 = \left(\frac{40}{-40}\right)\left(\frac{-x}{-60}\right)\left(\frac{-90}{-30}\right)$$

De donde obtenemos:

$$x=20 \text{ cm}$$

Como ya habíamos tenido en cuenta el signo, al salir positivo, nos indica que el signo elegido es correcto, luego O’ se encuentra a la izquierda de la lámina y a 20 cm de ella. Aplicamos por tanto ahora el invariante de Abbe a la primera cara de la lámina, teniendo en cuenta que pasaríamos del aire al vidrio:

$$n\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{S_1}\right) = n'\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{S'_1}\right) \Rightarrow 1\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{-20}\right) = 1.5\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{-60}\right) \Rightarrow \frac{1.5}{r_1} - \frac{1}{r_1} = \frac{1}{20} - \frac{1.5}{60} \Rightarrow r_1 = 20 \text{ cm}$$

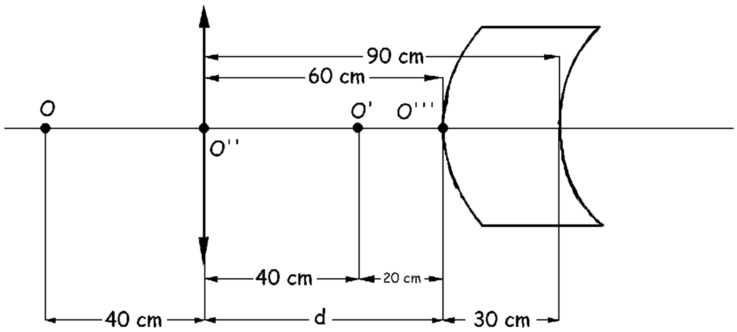
$$\underline{r_1=20 \text{ cm}}$$

b) Podemos ver en el gráfico que la distancia entre la lente y la lámina de vidrio es:

$$d=40+x=40+20=60 \text{ cm}$$

$$\underline{d=60 \text{ cm}}$$

Si nos fijamos bien en los resultados, la distancia entre la lámina de vidrio y la lente coincide con la distancia entre la lámina de vidrio y O’’, lo que implica que la imagen intermedia O’’ se forma justo sobre la lente. Estrictamente, la situación de todas las imágenes sería como muestra la figura.



c) Tendremos ahora la lente de la figura, a cuyo índice de refracción le vamos a llamar n_a (n_a=1.6). Tenemos la relación entre la potencia de la lente y los radios de curvatura de sus caras, r_{a1} y r_{a2}. Así, podemos poner:

$$P=(n_a-1)\left(\frac{1}{r_{a1}}-\frac{1}{r_{a2}}\right)\Rightarrow\frac{1}{f'}=(n_a-1)\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{-2r}\right)\Rightarrow\frac{1}{20}=(1.6-1)\left(\frac{3}{2r}\right)\Rightarrow r=18\text{ cm}$$

Por tanto los radios de curvatura de las caras de la lente serán:

r_{a1}=r=18 cm; r_{a2}=2r=2 · 18=36 cm

$\underline{r_{a1}=18\text{ cm}}$

$\underline{r_{a2}=36\text{ cm}}$

d) Ahora queremos que la lente tenga 5 dioptrías pero carácter divergente. La potencia por tanto será negativa. La nueva lente tendrá una potencia:

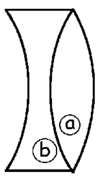
P_L=-5 dioptrías ⇒ f'_L=-20 cm

Esta lente está formada a su vez por dos lentes yuxtapuestas, la lente a del apartado anterior, y una nueva lente b. Puesto que dichas lentes están yuxtapuestas, sus potencias son aditivas y tendremos:

$$P_L=P_a+P_b\Rightarrow\frac{1}{f'_L}=\frac{1}{f'_a}+\frac{1}{f'_b}\Rightarrow\frac{1}{-20}=\frac{1}{20}+\frac{1}{f'_b}\Rightarrow f'_b=-10\text{ cm}$$

La lente que tenemos que poner yuxtapuesta a la lente a debe ser divergente y con una focal de 10 cm. Dicha lente la podemos colocar a la izquierda de la biconvexa, de modo que el radio en común será el primero, es decir, el de 18 cm. Así, tendremos para dicha lente:

$$P_b=(n_b-1)\left(\frac{1}{r_{b1}}-\frac{1}{r_{b2}}\right)\Rightarrow\frac{1}{f'_b}=(n_b-1)\left(\frac{1}{r_{b1}}-\frac{1}{r_{a1}}\right)\Rightarrow\frac{1}{-10}=(1.4-1)\left(\frac{1}{r_{b1}}-\frac{1}{18}\right)\Rightarrow r_{b1}=-5.14\text{ cm}$$



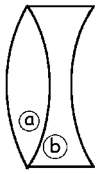
Como este radio es negativo significa que la lente b es una lente bicóncava (ver figura) de radios:

$\underline{r_{b1}=5.14\text{ cm}}$

$\underline{r_{b2}=18\text{ cm}}$

También podríamos colocar esta lente b a la derecha de la biconvexa, con lo cual el radio que tendrían en común sería el segundo de dicha lente, es decir, el de 36 cm. En este segundo supuesto tendremos, haciendo el mismo razonamiento:

$$P_b = (n_b - 1)\left(\frac{1}{r_{b1}} - \frac{1}{r_{b2}}\right) \Rightarrow \frac{1}{f'_b} = (n_b - 1)\left(\frac{1}{r_{a2}} - \frac{1}{r_{b2}}\right) \Rightarrow \frac{1}{-10} = (1.4 - 1)\left(\frac{1}{-36} - \frac{1}{r_{b2}}\right) \Rightarrow r_{b2} = 4.5 \text{ cm}$$



Como este radio es positivo significa que esta lente b es también bicóncava (ver figura) de radios:

$\underline{r_{b1}=36 \text{ cm}}$

$\underline{r_{b2}=4.5 \text{ cm}}$