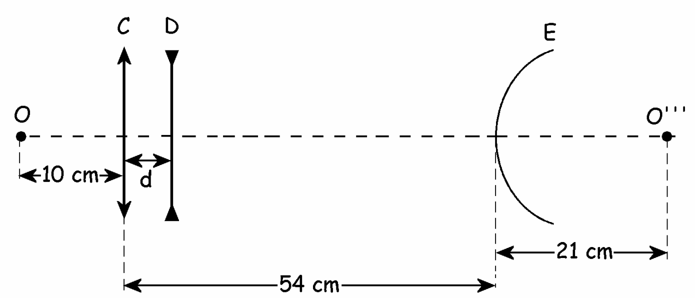
a) Llamaremos a las lentes con los subíndices C y D, para denotar que se trata de la lente convergente y divergente respectivamente. La imagen final es virtual, es decir, está formada por las prolongaciones de los rayos. Puesto que lo último que tenemos en el sistema es un espejo, los rayos rebotan en el mismo y quedan a su izquierda, y las prolongaciones por tanto a la derecha. La imagen final O''' entonces tiene que estar a la derecha del espejo. Así pues, tendremos lo que aparece en la figura.

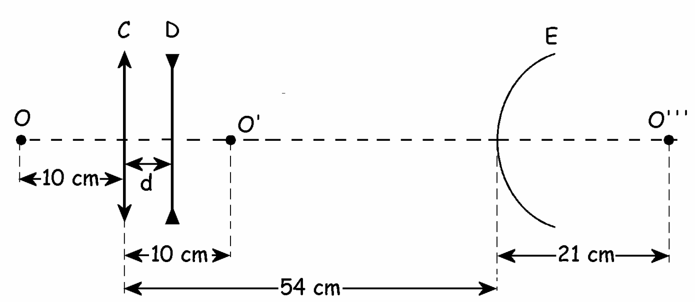


En primer lugar actúa la lente convergente, cuya focal será:

$$f'_C = \frac{1}{P_C} = \frac{1}{20} = 0.05\ \text{m} = 5\ \text{cm}$$

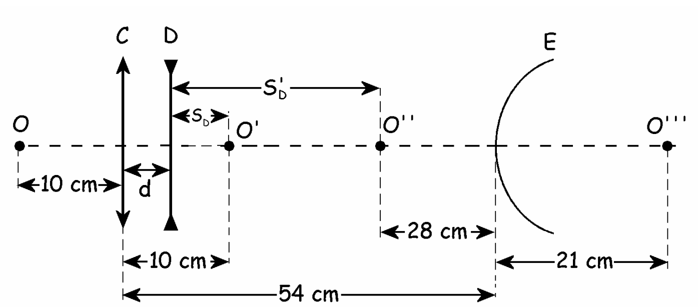
Para esta lente el objeto es O, situado a la izquierda de la lente y a 10 cm, y a la imagen la llamaremos O'. Tendremos pues:

$$-\frac{1}{S_C} + \frac{1}{S'_C} = \frac{1}{f'_C} \Rightarrow -\frac{1}{-10} + \frac{1}{S'_C} = \frac{1}{5} \Rightarrow S'_C = 10\ \text{cm}$$



La imagen O' se encuentra a la derecha de la lente convergente y a 10 cm de ella. Como no sabemos la distancia d entre las lentes convergente y divergente, no podemos resolver la lente divergente, para la cual el objeto sería O' y la imagen O''. No obstante, después de la lente divergente actuaría el espejo, para el cual el objeto es O'' y la imagen será O'''. Como conocemos el radio del espejo y la distancia imagen, determinamos el objeto del espejo:

$$\frac{1}{S_E} + \frac{1}{S'_E} = \frac{2}{R} \Rightarrow \frac{1}{S_E} + \frac{1}{21} = \frac{2}{168} \Rightarrow S_E = -28\ \text{cm}$$



El objeto del espejo, O'', que también es la imagen de la lente divergente, se encuentra a la izquierda del espejo y a 28 cm de él. Como no sabemos la distancia entre la lente divergente y el espejo, no podemos situar este punto. Lo que sí sabemos es que para una lente divergente el objeto y la imagen se encuentran en el mismo lado de la lente, a la izquierda o a la derecha. Vamos por tanto a la lente divergente, para la cual el objeto es O' y la imagen O''. Supongamos que O' y O'' están a la derecha de la lente divergente. Tendremos pues que al actuar dicha lente divergente:

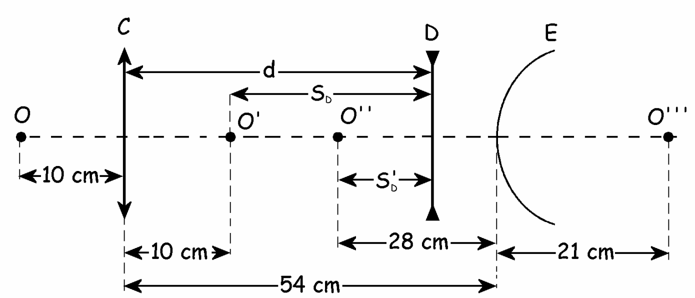
$$-\frac{1}{S_D}+\frac{1}{S'_D}=\frac{1}{f'_D}\Rightarrow-\frac{1}{10-d}+\frac{1}{54-28-d}=\frac{1}{-12}\Rightarrow\frac{1}{10-d}-\frac{1}{26-d}=\frac{1}{12}$$

$$\frac{26-d-10+d}{(10-d)(26-d)}=\frac{1}{12}\Rightarrow\frac{16}{260-26d-10d+d^2}=\frac{1}{12}\Rightarrow d^2-36d+68=0$$

$$d=\frac{36\pm\sqrt{36^2-4\cdot 68}}{2}=\begin{cases}34\text{ cm}\\ 2\text{ cm}\end{cases}$$

$\underline{d_1=34\text{ cm}}$
$\underline{d_2=2\text{ cm}}$

Puede verse que la solución primera implica que O' y O'' están a la izquierda de la lente y la solución segunda conlleva que ambos están a la izquierda de la lente. En cualquier caso, puede comprobarse que se llega al mismo resultado suponiendo que O' y O'' se encuentran a la izquierda de la lente divergente. Nos quedaría entonces lo que aparece en la figura y tendríamos que para la lente divergente se cumple:



$$-\frac{1}{S_D}+\frac{1}{S'_D}=\frac{1}{f'_D}\Rightarrow-\frac{1}{-(d-10)}+\frac{1}{-(28-54+d)}=\frac{1}{-12}\Rightarrow\frac{1}{d-10}-\frac{1}{d-26}=-\frac{1}{12}$$

$$-\frac{1}{d-10}+\frac{1}{d-26}=\frac{1}{12}\Rightarrow\frac{1}{10-d}-\frac{1}{26-d}=\frac{1}{12}$$

Vemos que llegamos exactamente a la misma expresión que antes, luego obtendríamos las mismas dos soluciones.

b) Si queremos que la imagen tenga un tamaño igual a la cuarta parte del tamaño del objeto tendremos que en módulo (a falta del signo):

$$|y'''|=\frac{|y|}{4}\Rightarrow|\beta|=\frac{|y'''|}{|y|}=\frac{|y|}{4|y|}=\frac{1}{4}$$

Podemos determinar el aumento lateral de la lente convergente y del espejo, que serán:

$$\beta_C=\frac{n_C S'_C}{n'_C S_C}=\frac{S'_C}{S_C}=\frac{10}{-10}=-1;\quad \beta_E=\frac{n_E S'_E}{n'_E S_E}=-\frac{S'_E}{S_E}=-\frac{21}{-28}=0.75$$

Ya podemos saber el signo del aumento lateral. Para la lente divergente el aumento lateral es positivo, ya que tanto objeto como imagen se encuentran al mismo lado de la lente (distancias objeto e imagen con el mismo signo); por tanto, puesto que β_C es negativo, β_D es positivo y β_E es positivo, el aumento lateral (producto de estos tres aumentos) tiene que ser negativo, es decir:

$$\beta=-\frac{1}{4}$$

Del aumento lateral tendremos:

$$\beta = \beta_C \beta_D \beta_E \Rightarrow -\frac{1}{4} = (-1)\beta_D (0.75) \Rightarrow \beta_D = \frac{1}{3}$$

Por otro lado:

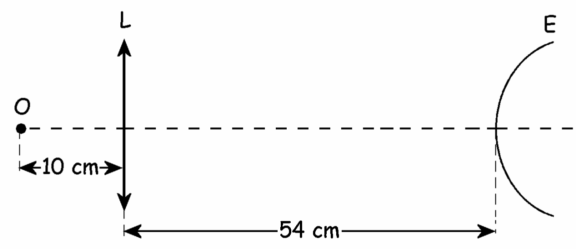
$$\beta_D = \frac{n_D S'_D}{n'_D S_D} = \frac{S'_D}{S_D} \Rightarrow \frac{1}{3} = \frac{S'_D}{S_D} \Rightarrow S_D = 3S'_D$$

Vemos que la distancia objeto tiene que se mayor que la distancia imagen, lo cual sólo ocurre cuando el objeto y la imagen de la lente divergente están a la izquierda de la lente, es decir, cuando:

d=34 cm

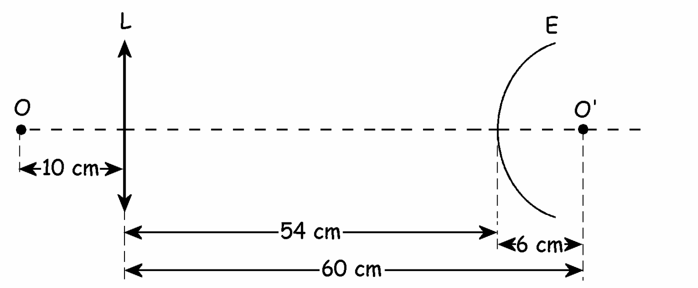
c) Si desplazamos la lente divergente y la ponemos en contacto con la convergente, es como si tuviéramos una única lente de distancia focal:

$$P = P_C + P_D \Rightarrow \frac{1}{f'} = \frac{1}{f'_C} + \frac{1}{f'_D} \Rightarrow \frac{1}{f'} = \frac{1}{5} - \frac{1}{12} \Rightarrow f' = 8.57 \text{ cm}$$



Por tanto, tenemos un sistema como el que aparece en la figura, formado solamente por dos elementos, una lente convergente de focal f' y un espejo cóncavo de 168 cm de radio. En primer lugar actúa la lente convergente, para la cual el objeto es O y la imagen será O'. Para dicha lente:

$$-\frac{1}{S} + \frac{1}{S'} = \frac{1}{f'} \Rightarrow -\frac{1}{-10} + \frac{1}{S'} = \frac{1}{8.57} \Rightarrow S' = 60 \text{ cm}$$



La imagen O' se encuentra a la derecha de la lente y a 60 cm de ella. Teniendo en cuenta que el espejo está a 54 cm de la lente, O' se encuentra a la derecha del espejo y a 6 cm de él, como puede verse en la figura. A continuación actúa el espejo, para el cual el objeto es O' y la imagen será O'' (imagen final). Para el espejo:

$$\frac{1}{S_E} + \frac{1}{S'_E} = \frac{2}{R} \Rightarrow \frac{1}{6} + \frac{1}{S'_E} = \frac{2}{168} \Rightarrow S'_E = -6.46 \text{ cm}$$

S'_E=-6.46 cm

La imagen final se encuentra a la izquierda del espejo y a 6.46 cm de él; como está formada por los rayos es real. El aumento lateral valdrá:

$$\beta = \beta_L \beta_E = \left(\frac{nS'}{n'S}\right)\left(\frac{n_E S'_E}{n'_E S_E}\right) = \left(\frac{S'}{S}\right)\left(-\frac{S'_E}{S_E}\right) = \left(\frac{60}{-10}\right)\left(-\frac{-6.46}{6}\right) = -6.46$$

A su vez, el aumento lateral es la relación entre el tamaño de la imagen y el tamaño del objeto, $\beta = \frac{y''}{y}$. Puesto que dicho aumento es negativo, significa que numerador y denominador de esa expresión tienen signo contrario, es decir, la imagen está invertida respecto del objeto. En módulo, dicho aumento es mayor que la unidad, lo cual implica que el numerador es mayor que el denominador, esto es, la imagen es mayor que el objeto.

IMAGEN REAL, INVERTIDA Y MAYOR

d) Comencemos por la lente convergente. Dicha lente tiene una distancia focal de 5 cm, un índice de refracción de 1.5, es cóncavo-convexa y sus radios están en relación 1 a 3, luego tendremos:

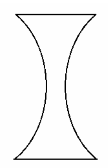
$$P_C = (n_C - 1)\left(\frac{1}{r_{C1}} - \frac{1}{r_{C2}}\right) \Rightarrow \frac{1}{f'_C} = (n_C - 1)\left(\frac{1}{-3r} - \frac{1}{-r}\right) \Rightarrow \frac{1}{5} = (1.5 - 1)\left(\frac{2}{3r}\right) \Rightarrow$$

r=1.67 cm

Por tanto los radios de esta lente serán:

$r_{C1}=3r=3 \cdot 1.67=5$ cm; $r_{C2}=r=1.67$ cm

$r_{C1}=5$cm
$r_{C2}=1.67$ cm



La lente divergente es bicóncava, tiene un índice de refracción de 1.6 y sus radios son iguales, luego para esta lente:

$$P_D = (n_D - 1)\left(\frac{1}{r_{D1}} - \frac{1}{r_{D2}}\right) \Rightarrow \frac{1}{f'_D} = (n_D - 1)\left(\frac{1}{-r} - \frac{1}{r}\right) \Rightarrow \frac{1}{-12} = (1.6 - 1)\left(\frac{2}{r}\right) \Rightarrow$$

r=14.4 cm

Por tanto los radios de esta lente son:

$r_{D1}=r_{D2}=r=14.4$ cm
$r_{D1}=r_{D2}=14.4$ cm