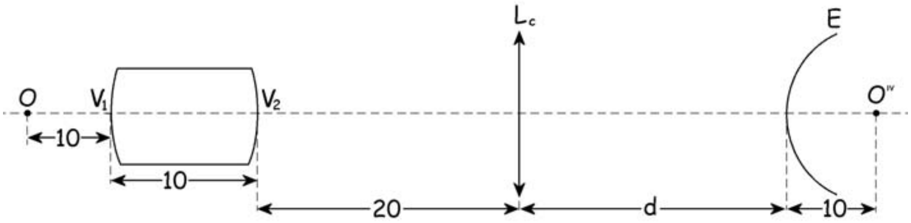
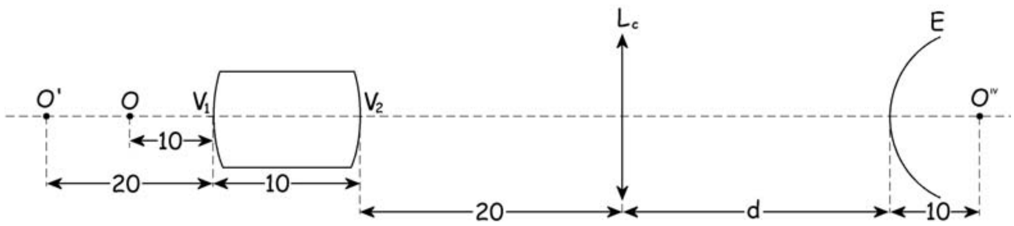
a) Tenemos el sistema que aparece en la figura. Sabemos la posición del objeto inicial O y la de la imagen final O^{IV}, que tiene que estar a la derecha del espejo puesto que es virtual, y a 10 cm de él. Comenzamos a resolver el sistema de izquierda a derecha, a partir del objeto O.

En primer lugar actúa la primera cara de la lámina de vidrio, para la cual el objeto es O y la imagen será O'. Como se trata de una superficie que separa dos medios con distinto índice de refracción aplicamos el invariante de Abbe:



$$n_1\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{S_1}\right)=n'_1\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{S'_1}\right)\Rightarrow 1\left(\frac{1}{20}-\frac{1}{-10}\right)=1.5\left(\frac{1}{20}-\frac{1}{S'_1}\right)\Rightarrow S'_1=-20\text{ cm}$$

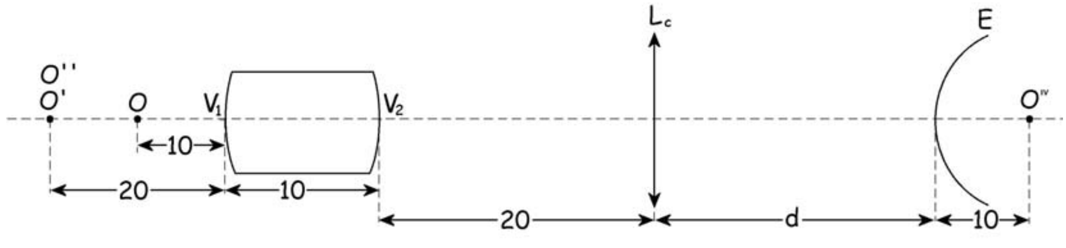
La imagen O' se encuentra a la izquierda de la primera cara de la lámina de vidrio y a 20 cm de ella.



Esta imagen O' actúa como objeto del elemento que va a continuación, es decir, de la segunda cara de la lámina de vidrio. Obviamente respecto de esta cara O' se encuentra a 30 cm. Aplicamos pues el invariante de Abbe a la segunda cara de la lámina de vidrio:

$$n_2\left(\frac{1}{r_2}-\frac{1}{S_2}\right)=n'_2\left(\frac{1}{r_2}-\frac{1}{S'_2}\right)\Rightarrow 1.5\left(\frac{1}{-30}-\frac{1}{-30}\right)=1\left(\frac{1}{-30}-\frac{1}{S'_2}\right)\Rightarrow S'_2=-30\text{ cm}$$

Esta imagen O'' se encuentra a la izquierda de la segunda cara de la lámina de vidrio y a 30 cm de ella (coincide con O').



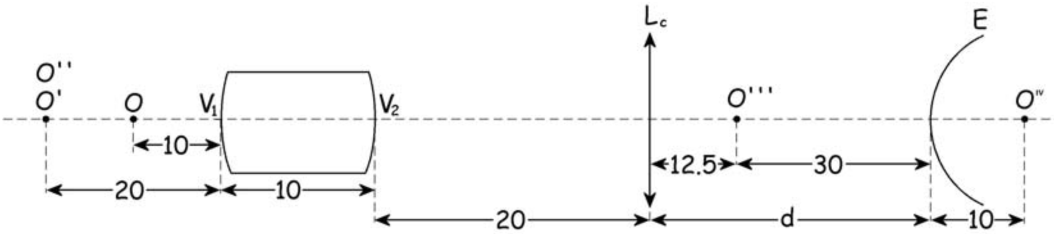
A continuación actúa la lente convergente L_c, para la cual el objeto es O'', que está a 50 cm de ella, y la imagen será O'''. Aplicamos la ecuación de las lentes delgadas:

$$-\frac{1}{S_c}+\frac{1}{S'_c}=\frac{1}{f'_c}\Rightarrow -\frac{1}{-50}+\frac{1}{S'_c}=\frac{1}{10}\Rightarrow S'_c=12.5\text{ cm}$$

La imagen O''' se encuentra a la derecha de la lente convergente, pero no sabemos si a la derecha o a la izquierda del espejo, ya que desconocemos la distancia entre la lente y el espejo. No obstante, para el espejo, que es el elemento que actúa a continuación y en último lugar (objeto O''', imagen O^{iv}) conocemos la imagen y el radio, luego podemos determinar el objeto. Aplicamos pues la ecuación de los espejos:

$$\frac{1}{S_E}+\frac{1}{S'_E}=\frac{2}{R}\Rightarrow\frac{1}{S_E}+\frac{1}{10}=\frac{2}{30}\Rightarrow S_E=-30\text{ cm}$$

O''' está a la izquierda del espejo y a 30 cm de él; sabíamos que a su vez se encuentra a la derecha de la lente y a 12.5 cm de ella, luego es obvio que O''' está entre la lente y el espejo, tal como se muestra en la figura:



En el gráfico podemos ver que la distancia entre la lente y el espejo es:

d=12.5+30=42.5 cm

d=42.5 cm

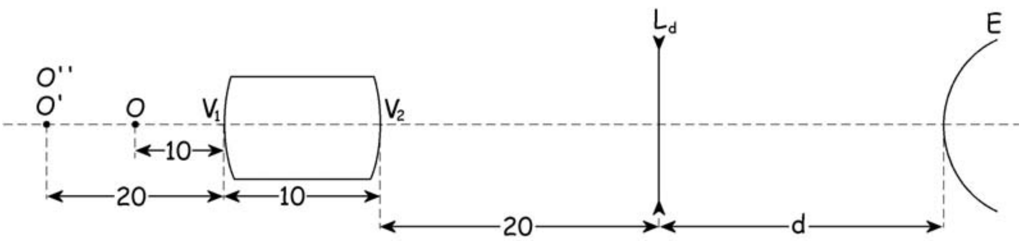
b) El aumento lateral del sistema es:

$$\beta=\beta_1\beta_2\beta_c\beta_E=\left(\frac{n_1S'_1}{n'_1\,S_1}\right)\left(\frac{n_2S'_2}{n'_2\,S_2}\right)\left(\frac{n_cS'_c}{n'_c\,S_c}\right)\left(\frac{n_ES'_E}{n'_E\,S_E}\right)=\left(\frac{S'_1}{n_vS_1}\right)\left(\frac{n_vS'_2}{S_2}\right)\left(\frac{S'_c}{S_c}\right)\left(-\frac{S'_E}{S_E}\right)=$$

$$=\left(\frac{S'_1}{S_1}\right)\left(\frac{S'_2}{S_2}\right)\left(\frac{S'_c}{S_c}\right)\left(-\frac{S'_E}{S_E}\right)=\left(\frac{-20}{-10}\right)\left(\frac{-30}{-30}\right)\left(\frac{12.5}{-50}\right)\left(-\frac{10}{-30}\right)=-0.167$$

β=-0.167

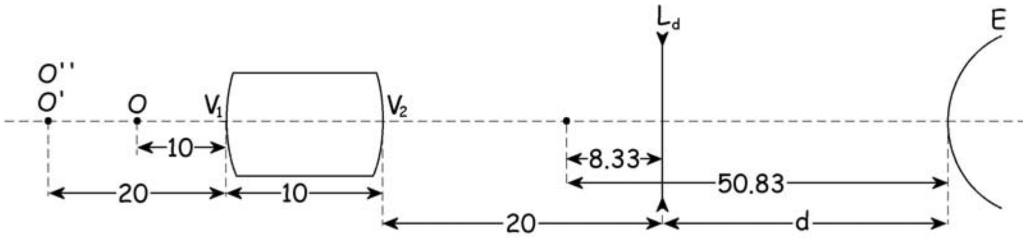
c) Ahora sustituimos la lente convergente por una divergente con la misma focal (lógicamente ahora la focal imagen es negativa). Las posiciones de O, O' y O'' no cambian puesto que son el resultado de actuar la lámina de vidrio.



A continuación actuaría la lente divergente L_d, para la cual el objeto es O'' y la imagen O'''. Aplicamos la ecuación de las lentes delgadas:

$$-\frac{1}{S_d}+\frac{1}{S'_d}=\frac{1}{f'_d}\Rightarrow -\frac{1}{-50}+\frac{1}{S'_d}=\frac{1}{-10}\Rightarrow S'_d=-8.33\,\text{cm}$$

O''' se encuentra a la izquierda de la lente divergente y a 8.33 cm de ella. Por tanto, se encuentra a la izquierda del espejo y a 8.33+42.5=50.83 cm de él.



Actúa finalmente el espejo, para el cual el objeto es O''' y la imagen O^{iv}, que es ya la imagen final. De la ecuación de los espejos:

$$\frac{1}{S_E}+\frac{1}{S'_E}=\frac{2}{R}\Rightarrow \frac{1}{-50.83}+\frac{1}{S'_E}=\frac{2}{30}\Rightarrow S'_E=11.58\,\text{cm}$$

<u>S'$_E$=11.58 cm</u>

El aumento lateral del sistema ahora será:

$$\beta=\beta_1\beta_2\beta_d\beta_E=\left(\frac{n_1S'_1}{n'_1\,S_1}\right)\left(\frac{n_2S'_2}{n'_2\,S_2}\right)\left(\frac{n_dS'_d}{n'_d\,S_d}\right)\left(\frac{n_ES'_E}{n'_E\,S_E}\right)=\left(\frac{S'_1}{n_vS_1}\right)\left(\frac{n_vS'_2}{S_2}\right)\left(\frac{S'_d}{S_d}\right)\left(-\frac{S'_E}{S_E}\right)=$$

$$=\left(\frac{S'_1}{S_1}\right)\left(\frac{S'_2}{S_2}\right)\left(\frac{S'_d}{S_d}\right)\left(-\frac{S'_E}{S_E}\right)=\left(\frac{-20}{-10}\right)\left(\frac{-30}{-30}\right)\left(\frac{-8.33}{-50}\right)\left(-\frac{11.58}{-50.83}\right)=0.0759$$

<u>β=0.0759</u>

En cuanto al carácter de la imagen, dicha imagen se forma a la derecha del espejo, luego tiene que estar formada por las prolongaciones de los rayos, es decir, es virtual.

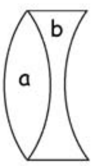
Además, el aumento lateral es la relación entre el tamaño de la imagen y el tamaño del objeto:

$$\beta=\frac{y'}{y}$$

Puesto que es positivo, el numerador y el denominador de esa expresión tienen que tener el mismo signo (ambas positivas o ambas negativas). En cualquier caso, la imagen es derecha con respecto al objeto.

Además, en módulo, el aumento lateral es menor que la unidad, de donde se deduce que el numerador de la expresión tiene que ser menor que el denominador, es decir, la imagen es menor que el objeto.

<u>IMAGEN VIRTUAL, DERECHA Y MENOR</u>



d) La lente divergente (d) está formada por la asociación de dos lentes, (a) y (b), tal como aparecen en la figura. Teniendo en cuenta que las lentes son yuxtapuestas, sus potencias son aditivas. Si además relacionamos las potencias con los índices de refracción y los radios tendremos:

$$P_d = P_a + P_b \Rightarrow \frac{1}{f'_d} = \frac{1}{f'_a} + \frac{1}{f'_b} \Rightarrow \frac{1}{f'_d} = (n_a - 1)\left(\frac{1}{r_{a1}} - \frac{1}{r_{a2}}\right) + (n_b - 1)\left(\frac{1}{r_{b1}} - \frac{1}{r_{b2}}\right)$$

$$\frac{1}{-10} = (1.5 - 1)\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{-r}\right) + (1.6 - 1)\left(\frac{1}{-r} - \frac{1}{r}\right) \Rightarrow -\frac{1}{10} = \frac{1}{r} - \frac{1.2}{r} \Rightarrow -\frac{1}{10} = -\frac{0.2}{r} \Rightarrow r = 2 \text{ cm}$$

$\underline{r=2 \text{ cm}}$