a) Tenemos que determinar la imagen de cada punto (P_1, P_2 y P_3) a través de L_1 y después a través de L_2. Debemos aplicar la ecuación de las lentes, donde tenemos que tener en cuenta el hecho de que la lente puede tener medios diferentes a un lado y otro (ocurre así para L_1).

Ecuación de las lentes (medios distintos):

$$-\frac{n}{a}+\frac{n'}{a'}=\frac{n'}{f'}$$

Esta ecuación se simplifica si los medios a un lado y otro son el mismo (n=n') (caso de L_2):

$$-\frac{1}{a}+\frac{1}{a'}=\frac{1}{f'}$$

i) Punto P_1

Este punto está situado sobre el eje óptico, a 6 cm (a la izquierda) de la primera lente L_1.

<u>Lente L_1</u>

La lente L_1 tiene medios diferentes a cada lado. Tenemos así que aplicar la ecuación:

$$-\frac{n}{a_1}+\frac{n'}{a_1'}=\frac{n'}{f_1'}$$

donde:
n = 1
n' = 1,33
a_1 = -6 cm
f'_1 = 12 cm

Así:

$$-\frac{1}{-6}+\frac{1{,}33}{a_1'}=\frac{1{,}33}{12}$$

$$\rightarrow \quad a'^{P1}_1 = -23{,}82 \text{ cm}$$

<u>Lente L_2</u>

La lente L_2 tiene medios iguales a ambos lados. Tenemos así que aplicar la ecuación:

$$-\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_2'}=\frac{1}{f_2'}$$

donde:
a_2 = - (23,82 + 10) = -33,82 cm
f'_2 = -20 cm

Así:

$$-\frac{1}{-33{,}82}+\frac{1}{a_2'}=\frac{1}{-20}$$

$$\rightarrow \quad a'^{P1}_2 = -12{,}57 \text{ cm}$$

La imagen de P_1 a través de las dos lentes (llamémosla P'_1) está situada a 12,57 cm (a la izquierda) de la lente L_2.

ii) Punto P_2

Este punto está situado sobre el eje óptico, a 5 cm (a la izquierda) de la primera lente L_1. Tenemos que hacer de nuevo los mismos pasos que antes.

Lente L_1

$$-\frac{n}{a_1}+\frac{n'}{a_1'}=\frac{n'}{f_1'}$$

n = 1
n' = 1,33
a_1 = -5 cm
f'_1 = 12 cm

Así:

$$-\frac{1}{-5}+\frac{1,33}{a_1'}=\frac{1,33}{12}$$

$\rightarrow$ $a'^{P2}_1 = -14,92$ cm

Lente L_2

$$-\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_2'}=\frac{1}{f_2'}$$

$a_2 = -(14,92 + 10) = -24,92$ cm
$f'_2 = -20$ cm

Así:

$$-\frac{1}{-24,92}+\frac{1}{a_2'}=\frac{1}{-20}$$

$\rightarrow$ $a'^{P2}_2 = -11,1$ cm

La imagen de P_2 a través de las dos lentes (llamémosla P'_2) está situada a 11,1 cm (a la izquierda) de la lente L_2.

La separación entre P'_2 y P'_1 es por tanto 12,57 – 11,1 = 1,47 cm.

iii) Punto P_3

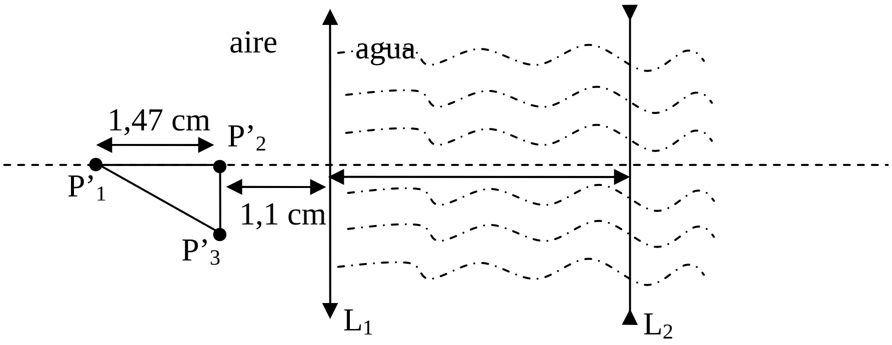
Este punto está situado fuera del eje óptico, en la vertical del punto P_2. Para calcular su imagen basta con calcular la imagen de un objeto de 1 cm de altura (P_2P_3 = 1 cm) cuya base es P_2.
Aplicamos la ecuación del aumento lateral para cada lente, teniendo en cuenta que L_1 tiene medios diferentes a cada lado (aire-agua) mientras que L_2 tiene medios iguales (agua-agua):

$$\beta=\beta_1.\beta_2=\frac{na_1'}{n'a_1}.\frac{a_2'}{a_2}$$

Aplicamos esta ecuación con los valores obtenidos para el punto P_2:

$$\beta=\beta_1.\beta_2=\frac{1.(-14,92)}{1,33.(-5)}.\frac{(-11,1)}{(-24,92)}=+1$$

Así, la altura de la imagen del objeto P_2P_3 es 1 cm. Por tanto P'_3 está situado fuera del eje, en la vertical de P'_2, a 1 cm de él (hacia abajo también).



Podemos verificar del dibujo que el nuevo triangulo es también rectángulo (es así porque estamos en óptica paraxial y estamos considerando objetos próximos al eje óptico). El área de este triángulo es:

$$\text{Area} = \frac{\text{base . altura}}{2} = \frac{1{,}47.1}{2} = 0{,}74\,\text{cm}^2$$

<u>Área = 0,74 cm^2. El triángulo es rectángulo.</u>

b) Para determinar la imagen final de P_2 a través de todo el sistema necesitamos calcular la imagen a través de L_1 y L_2, que ya lo hemos hecho, y además calcular la imagen a través de la lente gruesa. Para determinarla, podemos usar la ecuación de las lentes considerando la lente gruesa, sus planos principales y su focal, o trabajar con la invariante de Abbe superficie a superficie. Apliquemos este segundo método por sencillez.

Invariante de Abbe:

$$n\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{s}\right) = n'\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{s'}\right)$$

Partimos de la posición de la imagen de P_2 a través de L_1 y L_2, que como hemos visto estaba situada 11,1 cm a la izq. de L_2.

<u>1ª Superf. de Separación</u>

Se trata de la cara de la lente gruesa que separa agua y vidrio. Su radio es negativo (criterio de signos) y tendremos:

$n_1 = 1{,}33$
$n'_1 = 1{,}5$
$r_1 = -20$ cm
$s_1 = -(21+11{,}1) = -32{,}1$ cm

$$1{,}33\left(\frac{1}{-20}-\frac{1}{-32{,}1}\right) = 1{,}5\left(\frac{1}{-20}-\frac{1}{s_1'}\right)$$

$\rightarrow$ $s'_1 = -30$ cm

<u>2ª Superf. de Separación</u>

Se trata de la cara de la lente gruesa que separa vidrio y aire. Su radio es positivo (criterio de signos) y tendremos:

$n_2 = 1{,}5$
$n'_2 = 1$
$r_2 = 40$ cm
$s_2 = -(30+15) = -45$ cm

$$1{,}5\left(\frac{1}{40}-\frac{1}{-45}\right) = 1\left(\frac{1}{40}-\frac{1}{s_2'}\right)$$

$\rightarrow$ $s'_2 = -21{,}83$ cm

La imagen final de P_2 a través de todo el sistema óptico está situada a 21,83 cm a la izquierda del final del sistema óptico (de su último elemento, que es la 2ª S.S).

$P_2'^{(final)}$ = 21,83 cm a la izquierda de la 2ªS.S

Para acabar de determinar el carácter necesitamos el aumento producido por la lente gruesa, es decir, por cada S.S. (Ya vimos que el aumento lateral producido por el conjunto L_1-L_2 era +1).
Para una S.S, el aumento viene dado por:

$$\beta_{SS} = \frac{ns'}{n's}$$

Así, el aumento a través de la lente gruesa será:

$$\beta_{\text{lente gruesa}} = \frac{n_1 s_1'}{n_1' s_1} \cdot \frac{n_2 s_2'}{n_2' s_2} = \frac{1{,}33.(-30)}{1{,}5.(-32{,}1)} \cdot \frac{1{,}5.(-21{,}83)}{1.(-45)} = 0{,}6$$

Este es también el aumento total en este caso. Por tanto, el carácter de la imagen de P_2 es:

Imagen virtual (está a la izq. del último elemento y son todos transparentes), derecha ($\beta > 0$) y menor ($|\beta| < 1$).

Virtual, derecha, menor

c) Para determinar la posición del plano focal imagen de la lente gruesa, inmersa esta ahora en aire, basta con considerar un objeto en el infinito y ver donde está su imagen a través de la lente gruesa. Podemos trabajar de nuevo con la inv. de Abbe para cada S.S.

Objeto en el infinito

1ª S.S.

$n_1 = 1$
$n'_1 = 1{,}5$
$r_1 = -20$ cm
$s_1 = -\infty$

$$1\left(\frac{1}{-20} - \frac{1}{-\infty}\right) = 1{,}5\left(\frac{1}{-20} - \frac{1}{s_1'}\right)$$

$\rightarrow s'_1 = -60$ cm

2ª S.S.

$n_2 = 1{,}5$
$n'_2 = 1$
$r_1 = 40$ cm
$s_2 = -(60+15) = -75$ cm

$$1{,}5\left(\frac{1}{40} - \frac{1}{-75}\right) = 1\left(\frac{1}{40} - \frac{1}{s_2'}\right)$$

$\rightarrow s'_2 = -30{,}77$ cm

Así, el plano focal imagen está situado a 30,77 cm a la izquierda de la 2ª S.S.

$s'_2 = -30{,}77$ cm