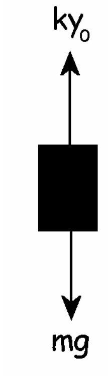

a) En el equilibrio tendremos que el cuerpo estará sometido a dos fuerzas, su peso (vertical y hacia abajo) y la reacción del resorte (vertical y hacia arriba). Se debe cumplir:

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow mg - ky_0 = 0 \Rightarrow y_0 = \frac{mg}{k} = \frac{5 \cdot 9.8}{80} = 0.6125 \text{ m}$$

$\underline{y_0 = 0.6125 \text{ m}}$

b) Puesto que se trata de un peso sometido a la acción de un resorte tendremos que la frecuencia angular valdrá:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{80}{5}} = 4 \text{ rad/s}$$

$\underline{\omega = 4 \text{ rad/s}}$

Y la frecuencia:

$$\omega = 2\pi\nu \Rightarrow \nu = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{4}{2\pi} = 0.637 \text{ s}^{-1}$$

$\underline{\nu = 0.637 \text{ s}^{-1}}$

c) La energía total del movimiento armónico vale:

$$E = \frac{1}{2} kA^2$$

de modo que necesitaremos conocer la amplitud del m. a. s. La ecuación del movimiento será del tipo:

$$y = A\text{sen}(\omega t + \varphi_0) = A\text{sen}(4t + \varphi_0)$$

Y la velocidad, derivando:

$$v = \dot{y} = \frac{dy}{dt} = A\omega\cos(\omega t + \varphi_0) = 4A\cos(4t + \varphi_0)$$

Como tenemos dos condiciones iniciales podemos determinar las dos constantes del movimiento, amplitud y constante de fase. Sabemos que para t=0 la posición es de 1 cm y la velocidad de 2 cm/s, de modo que:

$$t=0 \Rightarrow y=1 \text{ cm} \Rightarrow 1 = A\text{sen}\varphi_0$$
$$t=0 \Rightarrow v=2 \text{ cm/s} \Rightarrow 2 = 4A\cos\varphi_0$$

Dividiendo las dos expresiones:

$$\frac{1}{2} = \frac{\text{tg}\varphi_0}{4} \Rightarrow \text{tg}\varphi_0 = \frac{4}{2} = 2 \Rightarrow \varphi_0 = 1.107 \text{ rad}$$

Y de cualquiera de las ecuaciones obtenemos la amplitud:

$$1 = A\text{sen}\varphi_0 \Rightarrow A = \frac{1}{\text{sen}\varphi_0} = \frac{1}{\text{sen}1.107} = 1.118 \text{ cm}$$

Por tanto, pasándolo al Sistema Internacional, la energía del m. a. s. es:

$$E=\frac{1}{2}kA^2=\frac{1}{2}80(1.118\cdot 10^{-2})^2=5\cdot 10^{-3}\ J$$

$\underline{E=5\cdot 10^{-3}\ J}$

d) La amplitud del movimiento ya la tenemos:

$\underline{A=1.118\ cm}$

La velocidad hemos dicho que vale:

$$v=4A\cos(4t+\varphi_0)$$

La velocidad será máxima cuando el término cosenoidal (que es el único variable) sea máximo, es decir, valga la unidad:

$$v=v_{máx} \Rightarrow \cos(4t+\varphi_0)=1 \Rightarrow v_{máx}=4A=4\cdot 1.118=4.472\ cm/s$$

$\underline{v_{máx}=4.472\ cm/s}$

e) Puesto que la fuerza restauradora depende de la elongación, ésta será máxima cuando la elongación sea máxima, es decir, en el punto más bajo de la trayectoria, para el cual la elongación coincide con la amplitud:

$$F_{máx}=ky_{máx}=kA=80\cdot 1.118\cdot 10^{-2}=0.894\ N$$

$\underline{F_{máx}=0.894\ N}$

La aceleración es la derivada de la velocidad respecto del tiempo, luego será:

$$a=\frac{dv}{dt}=-16A\,\mathrm{sen}(4t+\varphi_0)$$

Dicha aceleración será máxima cuando el término senoidal sea máximo, es decir, cuando valga la unidad:

$$a=a_{máx} \Rightarrow \mathrm{sen}(4t+\varphi_0)=1 \Rightarrow a_{máx}=16A=16\cdot 1.118=17.888\ cm/s^2$$

$\underline{a_{máx}=17.888\ cm/s^2}$

f) Puesto que se producen varias oscilaciones el amortiguamiento será débil, de modo que la ecuación del movimiento será:

$$y=A_0e^{-\beta t}\mathrm{sen}(\omega t+\varphi_0)$$

Dicha expresión la podemos poner como:

$$y=A_0e^{-\beta t}\mathrm{sen}(\omega t+\varphi_0)=A\,\mathrm{sen}(\omega t+\varphi_0)$$

siendo A una amplitud que decrece exponencialmente con el tiempo:

$$A=A_0e^{-\beta t}$$

Tenemos la amplitud inicial y la amplitud al cabo de 1 minuto. Podemos poner, para esos dos instantes:

$$A_1 = A_0 e^{-\beta t_1}$$
$$A_2 = A_0 e^{-\beta t_2}$$

Dividiendo las dos expresiones:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{e^{-\beta t_1}}{e^{-\beta t_2}} \Rightarrow \frac{A_1}{A_2} = e^{-\beta(t_1 - t_2)} \Rightarrow \frac{A_1}{A_2} = e^{\beta(t_2 - t_1)} \Rightarrow \ln\frac{A_1}{A_2} = \beta(t_2 - t_1)$$

Sabemos que el tiempo que transcurre entre las dos oscilaciones es de 1 minuto (60 s), de modo que:

$$\ln\frac{A_1}{A_2} = \beta(t_2 - t_1) \Rightarrow \ln\frac{1.118}{1} = 60\beta \Rightarrow \beta = \frac{\ln 1.118}{60} = 1.859 \cdot 10^{-3}\ s^{-1}$$

$\underline{\beta = 1.859 \cdot 10^{-3}\ s^{-1}}$

g) Puesto que la energía es proporcional al cuadrado de la amplitud necesitaremos dos amplitudes sucesivas, para lo cual nos hace falta el período (tiempo que transcurre entre dos amplitudes sucesivas). Como el movimiento es subamortiguado, la frecuencia de la oscilación será:

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} = \sqrt{4^2 - (1.859 \cdot 10^{-3})^2} \approx 4$$

El período entonces:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{4} = 1.571\ s$$

Por tanto, si la primera amplitud es de 1.118 cm, la siguiente será:

$$A_1 = A_0 e^{-\beta T} = 1.118 e^{-1.859 \cdot 10^{-3} \cdot 1.571} = 1.1147\ cm$$

Como la energía es proporcional al cuadrado de la amplitud, tendremos que para dos energías sucesivas:

$$E_0 = CA_0^2$$
$$E_1 = CA_1^2$$

Dividiendo las dos expresiones eliminamos la constante de proporcionalidad:

$$\frac{E_0}{E_1} = \frac{A_0^2}{A_1^2} = \left(\frac{A_0}{A_1}\right)^2 = \left(\frac{1.118}{1.1147}\right)^2 = 1.005858$$

Así, tenemos que:

$$\frac{E_0}{E_1} = 1.005858 \Rightarrow E_1 = \frac{E_0}{1.005858} = 0.994176 E_0$$

Lo que se ha perdido es:

$$\text{PÉRDIDA} = \frac{E_0 - E_1}{E_0} = \frac{E_0 - 0.994176E_0}{E_0} = 0.00582$$

<u>PÉRDIDA=0.00582</u>

h) Inicialmente la amplitud es de 1 cm. Veamos para qué tiempo la amplitud es de 1 mm=0.1 cm. Puesto que el movimiento es amortiguado tendremos:

$$A = A_0 e^{-\beta t} \Rightarrow 0.1 = 1e^{-1.859\cdot 10^{-3}\,t} \Rightarrow \ln 0.1 = -1.859 \cdot 10^{-3}\,t$$

t=1238.61 s=20.64 min

<u>t=20.64 min</u>