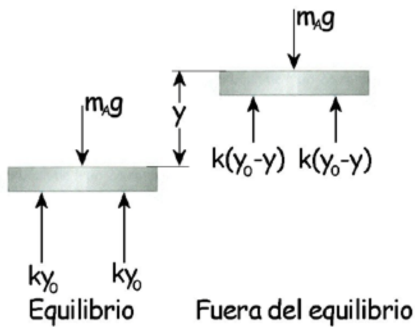


a) Realizamos el diagrama de sólido libre en el equilibrio y fuera del equilibrio cuando tenemos sólo los dos resortes. Nos queda lo que aparece en la figura. En el equilibrio es obvio que los dos resortes tienen que estar comprimidos para compensar al peso. En esta situación:

$$\Sigma F_Y=0 \Rightarrow ky_0+ky_0-m_Ag=0 \Rightarrow 2ky_0-m_Ag=0$$

Si desplazamos la plataforma una cantidad y y la soltamos tendremos:

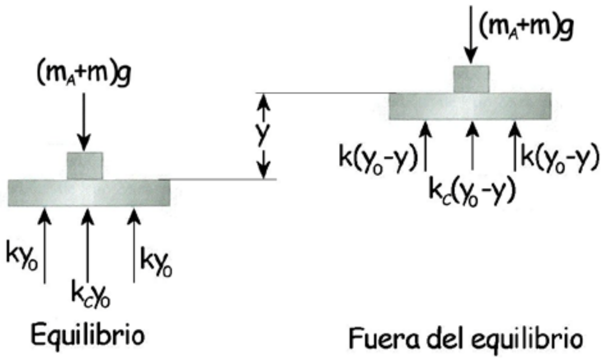
$$\Sigma F_Y = m_A\ddot{y} \Rightarrow k(y_0-y)+k(y_0-y)-m_Ag = m_A\ddot{y}$$
$$2k(y_0-y)-m_Ag = m_A\ddot{y} \Rightarrow 2ky_0-2ky-m_Ag = m_A\ddot{y}$$

Eliminamos la condición de equilibrio:

$$2ky_0-2ky-m_Ag = m_A\ddot{y} \Rightarrow -2ky = m_A\ddot{y} \Rightarrow m_A\ddot{y}+2ky=0 \Rightarrow \ddot{y}+\frac{2k}{m_A}y=0$$

Es la ecuación de un movimiento armónico simple de frecuencia angular:

$$\omega_0^2=\frac{2k}{m_A}$$



A continuación añadimos el bloque de masa m=40 kg, añadimos el resorte de constante k_C y hacemos lo mismo, con lo cual es sencillo porque sólo hay que añadir esto a los diagramas. Nos queda lo que aparece en la nueva figura. En la situación de equilibrio:

$$\Sigma F_Y=0 \Rightarrow ky_0+ky_0+k_Cy_0-(m_A+m)g=0$$
$$2ky_0+k_Cy_0-(m_A+m)g=0$$

Fuera del equilibrio, tras desplazar el sistema una distancia y y soltarlo:

$$\Sigma F_Y=(m_A+m)\ddot{y} \Rightarrow k(y_0-y)+k(y_0-y)+k_C(Y_0-Y)-(m_A+m)g=(m_A+m)\ddot{y}$$
$$2k(y_0-y)+k_C(y_0-y)-(m_A+m)g=(m_A+m)\ddot{y}$$
$$2ky_0-2ky+k_Cy_0-k_Cy-(m_A+m)g=(m_A+m)\ddot{y}$$

Eliminamos la condición de equilibrio:

$$2ky_0-2ky+k_Cy_0-k_Cy-(m_A+m)g=(m_A+m)\ddot{y} \Rightarrow -2ky-k_Cy=(m_A+m)\ddot{y}$$

$$(m_A + m)\ddot{y} + 2ky + k_C y = 0 \Rightarrow (m_A + m)\ddot{y} + (2k + k_C)y = 0 \Rightarrow \ddot{y} + \frac{2k + k_C}{m_A + m} y = 0$$

Es la ecuación de un movimiento armónico simple de frecuencia angular:

$$\omega_0^2 = \frac{2k + k_C}{m_A + m}$$

La frecuencia angular no debe variar luego es igual en ambos casos:

$$\frac{2k}{m_A} = \frac{2k + k_C}{m_A + m} \Rightarrow \frac{2 \cdot 1900}{50} = \frac{2 \cdot 1900 + k_C}{50 + 40} \Rightarrow k_C = 3040 \text{ N/m}$$

<u>k_C=3040 N/m</u>

b) Tenemos como datos que la amplitud del movimiento es 25 cm:

A=25 cm=0.25 m

Y la frecuencia de la oscilación:

$$\omega_0^2 = \frac{2k + k_C}{m_A + m} \Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{2k + k_C}{m_A + m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 1900 + 3040}{50 + 40}} = 8.718 \text{ rad/s}$$

Por tanto la ecuación del movimiento será:

$y=A\text{sen}(\omega_0 t+\varphi_0)=0.25\text{sen}(8.718t+\varphi_0)$

La condición inicial nos dice que para t=0 $\Rightarrow$ v=1.5 m/s. Nos hace falta por tanto la velocidad:

$$v = \dot{y} = \frac{dy}{dt} = 0.25 \cdot 8.718 \cos(8.718t + \varphi_0)$$

Aplicamos las condiciones iniciales:

t=0 $\Rightarrow$ v=1.5 m/s $\Rightarrow$ 1.5=0.25 · 8.718cosφ_0 $\Rightarrow$ cosφ_0=0.6882 $\Rightarrow$ φ_0=0.812 rad

Por tanto la ecuación del movimiento es:

$y=0.25\text{sen}(8.718t+\varphi_0)=0.25\text{sen}(8.718t+0.812)$

<u>y=0.25sen(8.718t+0.812)</u>

También podríamos haber elegido la ecuación del coseno, en cuyo caso tendríamos:

$$y=A\cos(\omega_0 t+\varphi_0)=0.25\cos(8.718t+\varphi_0) \Rightarrow v = \dot{y} = \frac{dy}{dt} = -0.25 \cdot 8.718 \text{sen}(8.718t + \varphi_0)$$

Y aplicando las condiciones iniciales:

t=0 $\Rightarrow$ v=1.5 m/s $\Rightarrow$ 1.5=-0.25 · 8.718senφ_0 $\Rightarrow$ senφ_0=-0.6882 $\Rightarrow$ φ_0=-0.759 rad

Y la ecuación que obtenemos es:

$$y=0.25\cos(8.718t+\varphi_0)=0.25\cos(8.718t-0.759)$$

$$\underline{y=0.25\cos(8.718t-0.759)}$$

Puede verse que los ángulos se diferencian en $\pi/2$, con lo cual el seno y el coseno son iguales:

$$0.812-(-0.759)=1.571=\frac{\pi}{2}$$

c) Partimos de cualquiera de las dos ecuaciones, por ejemplo la primera:

$$y=0.25\,\text{sen}(8.718t+0.812)$$

La velocidad vale:

$$v=\dot{y}=\frac{dy}{dt}=0.25\cdot 8.718\cos(8.718t+0.812)$$

Puesto que los dos primeros factores son constantes, la velocidad será máxima cuando el único término variable, que es el coseno, adquiera su valor máximo, que es la unidad:

$$v=v_{máx}\Rightarrow \cos(8.718t+0.812)=1\Rightarrow v_{máx}=0.25\cdot 8.718=2.179\ m/s$$

$$\underline{v_{máx}=2.179\ m/s}$$

Y la aceleración:

$$a=\frac{dv}{dt}=-0.25\cdot 8.718^2\,\text{sen}(8.718t+0.812)$$

Siguiendo el mismo razonamiento, la aceleración será máxima cuando el término variable adquiera su valor máximo:

$$a=a_{máx}\Rightarrow \text{sen}(8.718t+0.812)=1\Rightarrow a_{máx}=-0.25\cdot 8.718^2=-19\ m/s^2$$

En módulo:

$$\underline{a_{máx}=19\ m/s^2}$$

d) Tenemos ahora amortiguamiento. Conocemos la constante de amortiguamiento, luego podemos determinar el parámetro de amortiguamiento:

$$\gamma=50\ Ns/m\Rightarrow\beta=\frac{\gamma}{2(m_A+m)}=\frac{50}{2(50+40)}=0.278\ rad/s$$

Como $\beta<\omega_0$ el movimiento es subamortiguado, y la ecuación que lo rige es del tipo:

$$y=A_0e^{-\beta t}\text{sen}(\omega t+\varphi_0)$$

Siendo la frecuencia angular:

$$\omega=\sqrt{\omega_0^2-\beta^2}=\sqrt{8.718^2-0.278^2}=8.713\ rad/s$$

Y por tanto el período:

$$T=\frac{2\pi}{\omega}=\frac{2\pi}{8.713}=0.721\,s$$

La ecuación del movimiento podemos ponerla en la forma:

$$y=A\,sen(\omega t+\varphi_0)$$

pero teniendo en cuenta que esa amplitud no es constante sino que disminuye exponencialmente con el tiempo en la forma:

$$A=A_0e^{-\beta t}$$

Sabemos que la amplitud inicial es de 25 cm y que al final la queremos tener de 1 mm, luego en estos dos instantes:

$$A=A_0e^{-\beta t}$$
$$A'=A_0e^{-\beta t'}$$

Dividimos las dos expresiones:

$$\frac{A}{A'}=\frac{A_0e^{-\beta t}}{A_0e^{-\beta t'}}\Rightarrow\frac{A}{A'}=\frac{e^{-\beta t}}{e^{-\beta t'}}\Rightarrow\frac{A}{A'}=e^{-\beta t+\beta t'}\Rightarrow\frac{A}{A'}=e^{\beta(t'-t)}$$

El tiempo que transcurre entre dos oscilaciones sucesivas es un período, luego entre estas dos amplitudes transcurrirán n períodos:

$$\frac{A}{A'}=e^{\beta(t'-t)}\Rightarrow\frac{A}{A'}=e^{\beta nT}\Rightarrow\ln\frac{A}{A'}=\beta nT\Rightarrow n=\frac{\ln\frac{A}{A'}}{\beta T}=\frac{\ln\frac{0.25}{0.01}}{0.278\cdot 0.721}=27.60\text{ oscilaciones}$$

Por tanto para que la amplitud esté por debajo de 1 mm tienen que transcurrir al menos 28 oscilaciones.

<u>28 oscilaciones</u>

e) La ecuación del movimiento es:

$$y=A_0e^{-\beta t}sen(\omega t+\varphi_0)=0.25e^{-0.278t}sen(8.713t+\varphi_0)$$

Nos falta sólo el desfase inicial, para el cual sabemos las condiciones iniciales:

$$t=0\Rightarrow v=0$$

Derivamos la posición para obtener la velocidad:

$$v=\frac{dy}{dt}=-0.25\cdot 0.278e^{-0.278t}sen(8.713t+\varphi_0)+0.25\cdot 8.713e^{-0.278t}\cos(8.713t+\varphi_0)$$

Y aplicamos las condiciones iniciales:

$$t=0\Rightarrow v=0\Rightarrow 0=-0.25\cdot 0.278sen\varphi_0+0.25\cdot 8.713\cos\varphi_0\Rightarrow 0.278sen\varphi_0=8.713\cos\varphi_0$$
$$\frac{sen\varphi_0}{\cos\varphi_0}=tg\varphi_0=\frac{8.713}{0.278}=31.37\Rightarrow\varphi_0=1.539\text{ rad}$$

La ecuación del movimiento es por tanto:

$$y=0.25e^{-0.278t}sen(8.713t+\varphi_0)=0.25e^{-0.278t}sen(8.713t+1.539)$$

$$\underline{y=0.25e^{-0.278t}sen(8.713t+1.539)}$$

Si hubiéramos partido de la ecuación del coseno tendríamos, haciendo el mismo desarrollo:

$$y=A_0e^{-\beta t}cos(\omega t+\varphi_0)=0.25e^{-0.278t}cos(8.713t+\varphi_0)$$

$$v=\frac{dy}{dt}=-0.25\cdot 0.278e^{-0.278t}\cos(8.713t+\varphi_0)-0.25\cdot 8.713e^{-0.278t}sen(8.713t+\varphi_0)$$

Y aplicamos las condiciones iniciales:

$$t=0 \Rightarrow v=0 \Rightarrow 0=-0.25\cdot 0.278cos\varphi_0-0.25\cdot 8.713sen\varphi_0 \Rightarrow 0.278cos\varphi_0=-8.713sen\varphi_0$$

$$\frac{sen\varphi_0}{\cos\varphi_0}=tg\varphi_0=-\frac{0.278}{8.713}=-0.03188 \Rightarrow \varphi_0=-0.0319\text{ rad}$$

La ecuación del movimiento es por tanto:

$$y=0.25e^{-0.278t}cos(8.713t+\varphi_0)=0.25e^{-0.278t}cos(8.713t-0.0319)$$

$$\underline{y=0.25e^{-0.278t}cos(8.713t-0.0319)}$$

Igual que antes, la diferencia entre los dos desfases es de $\pi/2$, con lo cual el seno y el coseno son iguales y la ecuación es la misma:

$$1.539-(-0.0319)=1.5709=\frac{\pi}{2}$$