a) Tomamos el plano XY como el plano del movimiento, siendo el eje X el que coincide con la dirección de la ranura y el eje Y perpendicular a él. Por último, el eje Z será el perpendicular al plano del movimiento.

Si la plataforma está en reposo, sólo actuarán el peso, vertical y hacia abajo, y la normal que ejerce la base de la plataforma, vertical y hacia arriba. Estas dos fuerzas se encontrarán en el eje Z.

b) Si la plataforma gira con velocidad angular constante, el resorte se estira y alcanza una posición en la que se mantiene en reposo respecto de la plataforma, de modo que gira con ella. Llamemos Δl_o a lo que se ha estirado el muelle respecto de su longitud en reposo.

En cuanto a las fuerzas, hacemos el diagrama del cuerpo libre, donde debemos considerar sólo lo que ocurre en el plano XY, ya que el eje Z se mantiene siempre como en el apartado a). Puesto que el resorte está estirado, ejercerá una fuerza en la dirección del mismo (contraria al estiramiento) que por la ley de Hooke valdrá $k\Delta l_0$, siendo Δl_0 el alargamiento del resorte en esta situación.

En cuanto a las aceleraciones, puesto que la velocidad angular es constante, tenemos sólo una aceleración de la masa normal o centrípeta, que tiene la dirección del radio de curvatura (eje X) y apunta hacia el centro de curvatura. El valor de esta aceleración es:

$$a_n = \frac{v^2}{R} = \omega^2 R = \omega^2 (l_0 + \Delta l_0)$$

$$\underline{\text{ACELERACIÓN NORMAL}: a_n = \omega^2 (l_0 + \Delta l_0)}$$

c) La velocidad angular es:

$$\omega = 6\frac{rev}{s} = 6\frac{rev}{s}\cdot\frac{2\pi\ rad}{1\ rev} = 37.699\ rad/s$$

Aplicamos la segunda ley de Newton y tendremos:

$$\Sigma F_X = ma_X \Rightarrow k\Delta l_0 = ma_n \Rightarrow k\Delta l_0 = m\omega^2 R$$

donde el radio de curvatura será la longitud natural del resorte más su alargamiento:

$$R = l_0 + \Delta l_0$$

Sustituyendo todo:

$$k\Delta l_0 = m\omega^2 R \Rightarrow k\Delta l_0 = m\omega^2 (l_0 + \Delta l_0) \Rightarrow 1000\Delta l_0 = 0.2\cdot 37.699^2 (0.35 + \Delta l_0) \Rightarrow \Delta l_0 = 0.140\ m$$

$$\underline{\Delta l_0 = 0.140\ m}$$

d) Al desplazar la masa una cantidad x en la dirección de la guía, se va a producir una oscilación en esta dirección. Este movimiento se superpone a la rotación de la plataforma, que es un sistema de referencia en rotación. La aceleración total de la masa no será sólo la aceleración relativa de la masa al moverse (oscilación) en la guía, sino que debemos tener en cuenta el movimiento del sistema de referencia que contiene la masa (la guía o plataforma). En este movimiento tendremos entonces:

$$\mathbf{a} = \mathbf{a_0} + \alpha x \mathbf{OP} + \omega x(\omega x \mathbf{OP}) + 2\omega x \mathbf{v_{rel}} + \mathbf{a_{rel}}$$

El centro de la plataforma está en reposo luego $\mathbf{a_0}=0$, y como la plataforma gira con velocidad angular constante, $\alpha=0$. Nos queda por tanto:

$$\mathbf{a} = \mathbf{a_0} + \alpha x \mathbf{OP} + \omega x(\omega x \mathbf{OP}) + 2\omega x \mathbf{v_{rel}} + \mathbf{a_{rel}} = -\omega^2 \mathbf{OP} + 2\omega x \mathbf{v_{rel}} + \mathbf{a_{rel}}$$

Si desplazamos la partícula hacia la derecha una cantidad a mayores x el vector de posición respecto de O será:

$$\mathbf{OP}=(l_{equil}+x)\mathbf{i}$$

donde $l_{equil}=l_0+\Delta l_0$.

La velocidad relativa es la derivada de la posición relativa, y la aceleración relativa es la derivada de la velocidad relativa. El movimiento relativo es el que tendría la partícula si el sistema de referencia (plataforma) no girase. En este caso, sería un movimiento a lo largo de la guía (eje X), luego sólo tendría componente en la dirección horizontal, y sería:

$$\mathbf{v_{rel}}=\frac{dx}{dt}\mathbf{i}=\dot{x}\mathbf{i}$$

$$\mathbf{a_{rel}}=\frac{d\mathbf{v_{rel}}}{dt}=\frac{d\dot{x}}{dt}\mathbf{i}=\ddot{x}\mathbf{i}$$

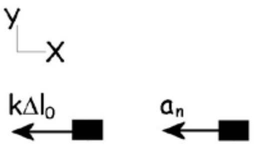
La velocidad angular es $\boldsymbol{\omega}=\omega\mathbf{k}$, por lo que:

$$2\omega\times\mathbf{v_{rel}}=2\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ 0 & 0 & \omega\\ \dot{x} & 0 & 0\end{vmatrix}=2\omega\dot{x}\mathbf{j}$$

Así:

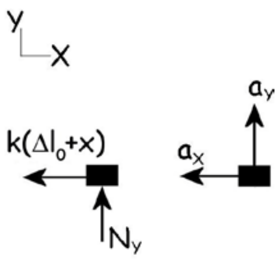
$$a=-\omega^2 OP+2\omega\times v_{rel}+a_{rel}=-\omega^2\left(l_{equil}+x\right)i+2\omega\dot{x}j+\ddot{x}i=\left[\ddot{x}-\omega^2\left(l_{equil}+x\right)\right]i+2\omega\dot{x}j$$

$$\underline{a=\left[\ddot{x}-\omega^2\left(l_{equil}+x\right)\right]i+2\omega\dot{x}j}$$



e) Debemos analizar en este caso el movimiento de la partícula, para lo cual debemos hacer el análisis dinámico y obtener la ecuación diferencial del movimiento. El diagrama del cuerpo libre en la situación de equilibrio cuando la plataforma gira con velocidad angular ω ya lo teníamos. Aplicamos la segunda ley de Newton en la dirección del eje x:

$$\Sigma F_X=ma_X \Rightarrow k\Delta l_0=ma_n \Rightarrow k\Delta l_0=m\omega^2(l_0+\Delta l_0)$$



Ahora desplazamos el bloque una cantidad x respecto de esa posición y nos queda:

$$\Sigma F_X=ma_X \Rightarrow -k\left(\Delta l_0+x\right)=m\left[\ddot{x}-\omega^2\left(l_{equil}+x\right)\right]$$

$$-k\left(\Delta l_0+x\right)=m\left[\ddot{x}-\omega^2\left(l_0+\Delta l_0+x\right)\right]$$

De la condición de equilibrio tenemos:

$$k\Delta l_0=m\omega^2(l_0+\Delta l_0)$$

Esto nos simplifica la expresión anterior, que se reduce a:

$$-k\left(\Delta l_0+x\right)=m\left[\ddot{x}-\omega^2\left(l_0+\Delta l_0+x\right)\right]\Rightarrow -k\Delta l_0-kx=m\ddot{x}-m\omega^2 l_0-m\omega^2\Delta l_0-m\omega^2 x$$

$$-kx=m\ddot{x}-m\omega^2 x\Rightarrow m\ddot{x}+kx-m\omega^2 x=0\Rightarrow m\ddot{x}+\left(k-m\omega^2\right)x=0\Rightarrow \ddot{x}+\frac{k-m\omega^2}{m}x=0$$

Tenemos la ecuación de un movimiento armónico simple, del tipo $\ddot{x}+\omega_0^2 x=0$, donde por comparación obtenemos:

$$\omega_0^2 = \frac{k - m\omega^2}{m} \Rightarrow \frac{4\pi^2}{T^2} = \frac{k - m\omega^2}{m} \Rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k - m\omega^2}} = 2\pi\sqrt{\frac{0.2}{1000 - 0.2 \cdot 37.699^2}} = 0.105\,\mathrm{s}$$

<u>T=0.105 s</u>