a) Si la partícula está realizando un movimiento armónico simple rectilíneo (eje X) las ecuaciones de la posición, velocidad y aceleración serán, respectivamente:

$$x=A_0 sen(\omega_0 t+\varphi)$$

$$\dot{x}=\frac{dx}{dt}=A_0\omega_0\cos(\omega_0 t+\varphi)$$

$$\ddot{x}=\frac{d\dot{x}}{dt}=-A_0\omega_0^2 sen(\omega_0 t+\varphi)$$

Si la velocidad y la aceleración son máximas, es porque los términos coseno y seno respectivamente adquieren su valor máximo, es decir, la unidad. Así, en módulo tendremos:

$$\dot{x}_{máx}=A_0\omega_0$$
$$\ddot{x}_{máx}=A_0\omega_0^2$$

Dividiendo las dos expresiones:

$$\frac{\dot{x}_{máx}}{\ddot{x}_{máx}}=\frac{A_0\omega_0}{A_0\omega_0^2}\Rightarrow\frac{\dot{x}_{máx}}{\ddot{x}_{máx}}=\frac{1}{\omega_0}\Rightarrow\omega_0=\frac{\ddot{x}_{máx}}{\dot{x}_{máx}}=\frac{1200}{80}=15\ rad/s$$

$\underline{\omega_0=15\ rad/s}$

Y para la amplitud despejamos de la velocidad, por ejemplo:

$$\dot{x}_{máx}=A_0\omega_0\Rightarrow A_0=\frac{\dot{x}_{máx}}{\omega_0}=\frac{80}{15}=5{,}33\ cm$$

$\underline{A_0=5{,}33\ cm}$

b) La ecuación de la posición será, por tanto:

$$x=A_0 sen(\omega_0 t+\varphi)=5{,}33 sen(15t+\varphi)$$

donde solo nos falta la fase inicial, para lo cual nos dan una condición de contorno. Sabemos que para $t=0\Rightarrow x=3$ cm, de modo que:

$$x=5{,}33 sen(15t+\varphi)\Rightarrow 3=5{,}33 sen\varphi\Rightarrow sen\varphi=0{,}5625\Rightarrow\varphi=0{,}597\ rad$$

La ecuación del movimiento por tanto es:

$$x=5{,}33 sen(15t+\varphi)=5{,}33 sen(15t+0{,}597)$$

$\underline{x=5{,}33 sen(15t+0{,}597)}$

c) En primer lugar vamos a ver el tipo de amortiguamiento, para lo cual tenemos que comparar la frecuencia natural de la oscilación (ω_0=15 rad/s) con el parámetro de amortiguamiento. Dicho parámetro es:

$$\beta=\frac{\gamma}{2m}=\frac{72}{2\cdot 4}=9\ rad/s$$

Como $\beta<\omega_0$ el movimiento es subamortiguado, y la solución de la ecuación diferencial es:

$$x=A_0e^{-\beta t}\text{sen}(\omega' t+\varphi)$$

siendo:

$$\omega'=\sqrt{\omega_0^2-\beta^2}=\sqrt{15^2-9^2}=12\text{ rad/s}$$

La solución entonces es:

$$x=A_0e^{-\beta t}\text{sen}(\omega' t+\varphi)=A_0e^{-9t}\text{sen}(12t+\varphi)$$

Nos faltan dos incógnitas, la amplitud inicial y el desfase. Para ello nos dan dos condiciones de contorno, que son que para $t=0 \Rightarrow x=0 \Rightarrow \dot{x}=60\text{ cm/s}$. De la primera condición:

$$t=0 \Rightarrow x=0 \Rightarrow x=A_0e^{-9t}\text{sen}(12t+\varphi) \Rightarrow 0=A_0\text{sen}\varphi \Rightarrow \text{sen}\varphi=0 \Rightarrow \varphi=0$$

Y tenemos ya:

$$x=A_0e^{-9t}\text{sen}(12t+\varphi)=A_0e^{-9t}\text{sen}(12t)$$

Y ahora para aplicar la condición de la velocidad derivamos primero respecto del tiempo:

$$\dot{x}=\frac{dx}{dt}=-9A_0e^{-9t}\text{sen}(12t)+12A_0e^{-9t}\cos(12t)$$

Y aplicamos la condición de contorno:

$$t=0 \Rightarrow \dot{x}=60\text{ cm/s} \Rightarrow 60=12A_0 \Rightarrow A_0=\frac{60}{12}=5\text{ cm}$$

La ecuación pedida es:

$$x=A_0e^{-9t}\text{sen}(12t)=5e^{-9t}\text{sen}(12t)$$

$$\underline{x=5e^{-9t}\text{sen}(12t)}$$

d) Podemos poner esta ecuación en la forma:

$$x=5e^{-9t}\text{sen}(12t)=A\text{sen}(12t)$$

siempre que tengamos en cuenta que la amplitud está definida como:

$$A=5e^{-9t}$$

de modo que no es constante sino que disminuye exponencialmente con el tiempo. Nos piden el tiempo que tiene que transcurrir para que la amplitud se reduzca al 0,1% de la inicial, es decir:

$$A=0{,}1\%\text{ de }5=\frac{0{,}1}{100}5=5\cdot10^{-3}\text{ cm}$$

Y sustituyendo en la ecuación de la amplitud:

$$A=5e^{-9t} \Rightarrow 5\cdot10^{-3}=5e^{-9t} \Rightarrow 10^{-3}=e^{-9t} \Rightarrow \ln10^{-3}=-9t \Rightarrow t=0768\text{ s}$$

$$\underline{t=0{,}768\text{ s}}$$