a) Nos dicen que se trata de un movimiento armónico simple, de modo que la ecuación será:

$$x=A_0\,\text{sen}(\omega_0 t+\varphi)$$

Conocemos la amplitud, ya que el segmento que se recorre es de 5 cm, luego la longitud total será el doble de la amplitud. Así:

$$2A_0=5\text{ cm} \Rightarrow A_0=2,5\text{ cm}=0,025\text{ m}$$

Además, como la partícula tarda 1 s en ir de un extremo al otro, el período será el doble, ya que el período es el tiempo que tarda la partícula en encontrarse en el mismo estado de vibración:

$$T=2\text{ s}$$

La frecuencia natural entonces será:

$$\omega_0=\frac{2\pi}{T}=\frac{2\pi}{2}=\pi\text{ rad/s}$$

Y para la fase inicial nos dan las condiciones iniciales, es decir, para $t=0 \Rightarrow x=0$:

$$x=A_0\,\text{sen}(\omega_0 t+\varphi) \Rightarrow 0=A_0\,\text{sen}\varphi \Rightarrow \text{sen}\varphi=0 \Rightarrow \varphi=0$$

Por tanto la ecuación del movimiento es:

$$x=A_0\,\text{sen}(\omega_0 t+\varphi)=0,025\,\text{sen}(\pi t)$$

$$\underline{x=0,025\,\text{sen}(\pi t)}$$

b) Para la energía cinética necesitamos la velocidad, luego derivamos respecto del tiempo:

$$v=\dot{x}=\frac{dx}{dt}=\pi\cdot 0,025\cos(\pi t)=\pi\cdot 0,025\cos(2,75\pi)=-0,0555\text{ m/s}$$

Por tanto la energía cinética es:

$$E_C=\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}10^{-3}\cdot 0,0555^2=1,542\cdot 10^{-6}\text{ J}$$

$$\underline{E_C=1,542\cdot 10^{-6}\text{ J}}$$

c) Ahora nos dicen que coinciden los dos valores de la energía cinética y la potencial:

$$E_C=E_P \Rightarrow \frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}kx^2 \Rightarrow mv^2=kx^2$$

Si tenemos en cuenta la expresión de la frecuencia natural de la oscilación:

$$\omega_0=\sqrt{\frac{k}{m}} \Rightarrow k=m\omega_0^2$$

Sustituyendo:

$$mv^2=kx^2 \Rightarrow mv^2=m\omega_0^2x^2 \Rightarrow v^2=\omega_0^2x^2 \Rightarrow \pi^2\cdot 0,025^2\,\text{sen}^2(\pi t)=\pi^2\,0,025^2\cos^2(\pi t)$$

$$\text{sen}^2(\pi t)=\cos^2(\pi t) \Rightarrow \text{sen}(\pi t)=\cos(\pi t)$$

El único ángulo que tiene igual el seno y el coseno es el de $45^\circ=\frac{\pi}{4}\text{ rad}$:

$$\text{sen}(\pi t)=\cos(\pi t) \Rightarrow \pi t=\frac{\pi}{4} \Rightarrow t=\frac{1}{4}=0,25\text{ s}$$

$$\underline{t=0,25\text{ s}}$$

d) Si la fuerza de rozamiento es proporcional a la velocidad estamos en el caso del amortiguamiento viscoso, es decir, $F_r=-\gamma v$, de donde por comparación podemos obtener la constante de amortiguamiento:

$$\gamma=4 \cdot 10^{-3}\ \text{Ns/m}$$

El parámetro de amortiguamiento será por tanto:

$$\beta = \frac{\gamma}{2m} = \frac{4 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 10^{-3}} = 2\ s^{-1}$$

Como $\beta<\omega_0$ el movimiento es subamortiguado y la ecuación del movimiento es:

$$x=A_0 e^{-\beta t}\,\text{sen}(\omega' t+\varphi)$$

donde podemos hablar de una amplitud que disminuye exponencialmente con el tiempo y que sería:

$$A=A_0 e^{-\beta t}$$

Ahora nos dicen que la amplitud se reduce a la milésima parte, luego tendremos:

$$A=A_0 e^{-\beta t} \Rightarrow \frac{A_0}{1000} = A_0 e^{-2t} \Rightarrow \frac{1}{1000} = e^{-2t} \Rightarrow \ln\frac{1}{1000} = -2t \Rightarrow t = -\frac{\ln\frac{1}{1000}}{2} = 3{,}45\,s$$

$$\underline{t=3{,}45\ s}$$