a) Al colgar por el extremo libre una masa m la fuerza tensora a la que se hallan sometidos los dos hilos es la misma (F=m g) y como los dos hilos tienen igual sección recta el esfuerzo tensor en ambos es también el mismo:

$$\sigma = \frac{F}{s}$$

El aumento de longitud que experimenta cada hilo debido al esfuerzo tensor σ es:

$$\Delta l_{acero} = \frac{\sigma\, l_{acero}}{E_{acero}} = \frac{F\, l_{acero}}{s\, E_{acero}} = \frac{F\, 3}{10^{-6} 20{\cdot}10^{10}} = 1.5{\cdot}10^{-5}\, F$$

$$\Delta l_{cobre} = \frac{\sigma\, l_{cobre}}{E_{cobre}} = \frac{F\, l_{cobre}}{s\, E_{cobre}} = \frac{F{\cdot}2}{10^{-6}{\cdot}12.8{\cdot}10^{10}} = 1.56{\cdot}10^{-5}\, F$$

Y el aumento de longitud total:

$$\Delta l = \Delta l_{acero} + \Delta l_{cobre} = 4 \text{ mm}$$

Disponemos, por lo tanto de un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas.

$$\frac{\Delta l_{cobre}}{\Delta l_{acero}} = \frac{1.5625{\cdot}10^{-5}\, F}{1.5{\cdot}10^{-5}\, F} = 1.04$$

$$\Delta l_{cobre} = 1.04 \Delta l_{acero}$$
$$\Delta l_{acero} + 1.04 \Delta l_{acero} = 4\ 10^{-3} \text{ m}$$
$$\Delta l_{acero} = 1.96\ 10^{-3} \text{ m}$$
$$F = \frac{1.96\, 10^{3}}{1.5\, 10^{-5}} = 130.5 \text{ N}$$

$$\underline{m = 13.33 \text{ kg}}$$

b) El esfuerzo máximo que puede soportar el hilo de acero sin sobrepasar el límite elástico es $(\sigma_{Elás})_{acero}=25{\cdot}10^7$ N/m^2 y el que puede soportar el hilo de cobre es $(\sigma_{Elás})_{cobre}=15 \cdot 10^7$ N/m^2. Como los dos hilos al estar unidos y tener la misma sección soportan el mismo esfuerzo, el esfuerzo límite del conjunto será el menor de los esfuerzos límite de cada hilo. Es decir $15{\cdot}10^7$ N/m^2 y la carga es:

$$F = \sigma\, s = 15\ 10^7 \text{ N/m}^2\ 10^{-6} \text{ m}^2 = 150 \text{ N}$$

$$\underline{F_{máx} = 150 \text{ N}}$$

La energía potencial elástica almacenada en cada hilo, cuando están sometidos a una fuerza tensora F y su variación de longitud es Δl, podemos calcularla por la expresión:

$$E_P = \frac{1}{2}\frac{E\, s}{l}\Delta l^2 = \frac{1}{2} F\, \Delta l$$

En este caso tenemos:

$$(E_P)_{acero} = \frac{1}{2} F_{máx}\ \Delta l_{acero}$$

$$(E_P)_{cobre} = \frac{1}{2} F_{máx}\ \Delta l_{cobre}$$

$$\Delta l_{acero} = \frac{F_{máx}\ l_{acero}}{s\, E_{acero}} = \frac{150 \cdot 3}{10^{-6} 20{\cdot}10^{10}} = 2.25{\cdot}10^{-3} \text{ m}$$

$$\Delta l_{cobre}=\frac{F_{máx}\, l_{cobre}}{s\, E_{cobre}}=\frac{150\cdot 2}{10^{-6}\cdot 12.8\cdot 10^{10}}=2.34\cdot 10^{-3}\ \text{m}$$

$$(E_P)_{acero}=\frac{1}{2}150\cdot 2.25\cdot 10^{-3}=0.169\ \text{J}$$

$$(E_P)_{cobre}=\frac{1}{2}150\cdot 2.34\cdot 10^{-3}=0.176\ \text{J}$$

$\underline{(E_P)_{acero}=0.169\ \text{J}}$

$\underline{(E_P)_{cobre}=0.176\ \text{J}}$

c) El coeficiente de reflexión viene dado por: $R=\dfrac{v_{cobre}-v_{acero}}{v_{cobre}+v_{acero}}$

El coeficiente de transmisión viene dado por: $T=\dfrac{2\, v_{cobre}}{v_{cobre}+v_{acero}}$

La velocidad de propagación de una onda transversal en un hilo es:

$$v=\sqrt{\frac{F}{\mu}}$$

La fuerza tensora en el hilo es la calculada en el apartado a):

$$F=130.5\ \text{N}$$

y la densidad lineal μ

$$\mu_{acero}=\rho_{acero}\cdot s=7800\ \text{kg/m}^3\cdot 10^{-6}\ \text{m}^2=0.0078\ \text{kg/m}$$
$$\mu_{cobre}=\rho_{cobre}\cdot s=8960\ \text{kg/m}^3\cdot 10^{-6}\ \text{m}^2=0.00896\ \text{kg/m}$$

$$v_{cobre}=\sqrt{\frac{F}{\mu_{cobre}}}=\sqrt{\frac{130.5}{0.00896}}=120.68\ \text{m/s}$$

$$v_{acero}=\sqrt{\frac{F}{\mu_{acero}}}=\sqrt{\frac{130.5}{0.0078}}=129.34\ \text{m/s}$$

$$R=\frac{v_{cobre}-v_{acero}}{v_{cobre}+v_{acero}}=\frac{120.68-129.34}{120.68+129.34}=-0.034$$

$$T=\frac{2\, v_{cobre}}{v_{cobre}+v_{acero}}=\frac{2\cdot 120.68}{120.68+129.34}=0.962$$

$\underline{R=-0.034}$ y $\underline{T=0.962}$

d) La ecuación de la onda (si tomamos el eje Y vertical, en la dirección del hilo, positivo hacia abajo, y el eje X perpendicular al eje Y) tiene la expresión:

$$x(y,t)=A\ \text{sen}(\omega t-ky)$$

La ecuación de la onda incidente:

$$x_i\,(y,t)=A_i\ \text{sen}(\omega t-k_{acero}\, y)$$

La ecuación de la onda reflejada:

$$x_R\,(y,t)=A_R\ \text{sen}(\omega t+k_{acero}\, y)=R\ A_i\ \text{sen}(\omega t+k_{acero}\, y)$$

La ecuación de la onda transmitida:

$$x_T\,(y,t)=A_T\ \text{sen}(\omega t-k_{cobre}\, y)=T\ A_i\ \text{sen}(\omega t-k_{cobre}\, y)$$

$A_i = 5\ 10^{-2}$ m

$A_R = R\ A_i = -0.17\ 10^{-2}$ m

$A_T = T\ A_i = 4.81\ 10^{-2}$ m

$\omega = 2\pi\ \nu = 628.3$ rad/s

$$k_{acero} = \frac{\omega}{v_{acero}} = 4.858\ m^{-1}$$

$$k_{cobre} = \frac{\omega}{v_{cobre}} = 5.206\ m^{-1}$$

$\underline{x_i = 5\ 10^{-2}\ \text{sen}\ (628.3t - 4.858\ y)\ (m)}$

$\underline{x_R = -0.17\ 10^{-2}\ \text{sen}\ (628.3t + 4.858\ y)\ (m)}$

$\underline{x_T = 4.81\ 10^{-2}\ \text{sen}(628.3t - 5.206\ y)\ (m)}$

<u>(t en segundos, y en metros)</u>