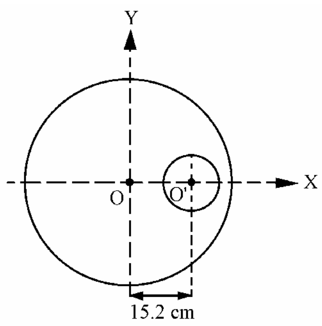


a) Como el centro de masa G no coincide con el centro geométrico del círculo O, tendremos que calcular lo primero de todo la posición del centro de masa y su aceleración. Tomamos unos ejes coordenados XY con origen en O. Consideramos que la figura está formada por un disco de radio R=30.4 cm y centro en O, cuyo centro de gravedad estará en dicho punto O (0,0) y un hueco, de masa negativa, de radio r=7.6 cm y centro de gravedad en el punto O´ (15.2, 0) cm. Marcaremos todo lo que se refiera al círculo grande con el subíndice C y lo que se refiera al hueco con el subíndice H. La densidad superficial de esta figura será:

$$\sigma = \frac{m}{S} = \frac{m}{S_C - S_H} = \frac{m}{\pi R^2 - \pi r^2} = \frac{m}{\pi(R^2 - r^2)} = = \frac{68}{\pi(30.4^2 - 7.6^2)} = 0.025\ \text{kg}/\text{cm}^2$$

La coordenada x_G del centro de masa:

$$x_G = \frac{m_C x_C - m_H x_H}{m_C - m_H} = \frac{\sigma S_C x_C - \sigma S_H x_H}{\sigma S_C - \sigma S_H} = \frac{\pi R^2 x_C - \pi r^2 x_H}{\pi R^2 - \pi r^2} = \frac{R^2 x_C - r^2 x_H}{R^2 - r^2} = \frac{-7.6^2 \cdot 15.2}{30.4^2 - 7.6^2} = -1\ \text{cm}$$

La otra coordenada y_G=0 porque el eje X es eje de simetría. El centro de masa G está situado por tanto 1 cm a la izquierda del centro geométrico del disco O.

Tendremos también que calcular el momento de inercia respecto a G:

$$I_G = I_{GC} + I_{GH}$$

siendo I_{GC} el momento de inercia del disco lleno respecto a G e I_{GH} el momento de inercia del hueco con respecto a G:

$$I_{GC} = \frac{1}{2} m_C R^2 + m_C d_{OG}^2 = \frac{1}{2}\sigma S_C R^2 + \sigma S_C d_{OG}^2 = \frac{1}{2}\sigma\pi R^4 + \sigma\pi R^2 d_{OG}^2 =$$

$$= \frac{1}{2} 0.25 \cdot \pi \cdot 30.4^4 + 0.25 \cdot \pi \cdot 30.4^2 \cdot 1^2 = 33578.65\ \text{kgm}^2$$

El momento de inercia entonces será:

$$I_G = I_{GC} + I_{GH} = 33578.65 - 1319.65 = 32259\ \text{kgcm}^2 = 3.23\ \text{kgm}^2$$

Por último necesitamos la aceleración del centro de masa:

$$\mathbf{a_G} = \mathbf{a_O} + \boldsymbol{\alpha} \text{ X } \mathbf{OG} + \boldsymbol{\omega} \text{ X } (\ \boldsymbol{\omega} \text{ X } \mathbf{OG})$$

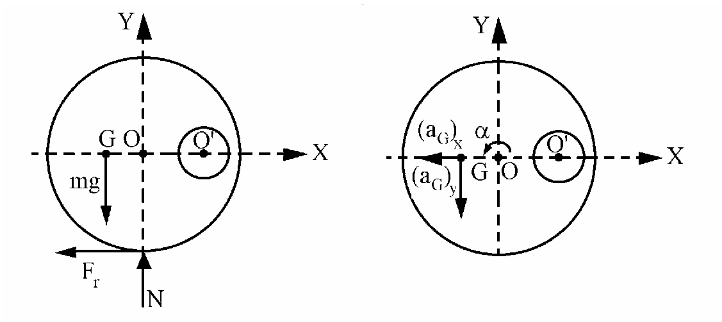
Un instante después de soltar el disco, como se parte del reposo:

$$\omega = 0 \Rightarrow \mathbf{a_G} = \mathbf{a_O} + \boldsymbol{\alpha} \text{ X } \mathbf{OG} = -0.304\alpha\mathbf{i} + (\alpha\mathbf{k}) \text{ X } (-0.01\mathbf{i}) = -0.304\alpha\mathbf{i} - 0.01\alpha\mathbf{j}$$

Hacemos el diagrama de sólido libre y aplicamos las ecuaciones del movimiento:

$$\Sigma\mathbf{F} = m\mathbf{a_G}$$
$$\Sigma\mathbf{M_G} = \mathbf{I_G}\boldsymbol{\alpha}$$

Separamos las ecuaciones en los distintos ejes:



$$\Sigma F_X=m(a_G)_X \Rightarrow -F_r=m(-0.304\alpha)$$
$$\Sigma F_Y=m(a_G)_Y \Rightarrow N-mg=m(-0.01\alpha)$$
$$\boldsymbol{\Sigma M_G=I_G\alpha} \Rightarrow N\ OG-F_rR=I_G\alpha$$

Sustituimos los valores conocidos:

$$\Sigma F_X=m(a_G)_X \Rightarrow -F_r=m(-0.304\alpha) \Rightarrow F_r=68 \cdot 0.304\alpha$$
$$\Sigma F_Y=m(a_G)_Y \Rightarrow N-mg=m(-0.01\alpha) \Rightarrow N-68 \cdot 9.8=-68 \cdot 0.01\alpha$$
$$\boldsymbol{\Sigma M_G=I_G\alpha} \Rightarrow N\ OG-F_rR=I_G\alpha \Rightarrow N \cdot 0.01-F_r \cdot 0.304=3.23\alpha$$

Tenemos un sistema de tres ecuaciones y tres incógnitas (N, F_r y α) de cuya resolución:

$\underline{F_r=14.62\ N}$

b) La velocidad angular será máxima cuando el trabajo realizado por el peso (W), que es la única fuerza de las que actúan sobre el disco que realiza trabajo, sea máximo, es decir, cuando el centro de gravedad pasa a la posición mas baja. Tendremos entonces:

$$W=\Delta E_C \Rightarrow mgOG=\frac{1}{2}mv_G^2+\frac{1}{2}I_G\omega^2$$

La energía cinética inicial es nula puesto que se parte del reposo. Como C es el centro instantáneo de rotación:

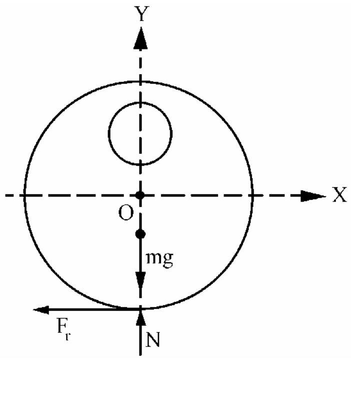
$$v_G=\omega CG;\ CG=R-OG=0.304-0.01=0.294\ m \Rightarrow v_G=\omega CG=0.294\omega$$

Sustituyendo dichos valores obtenemos:

$$mgOG=\frac{1}{2}mv_G^2+\frac{1}{2}I_G\omega^2 \Rightarrow mgOG=\frac{1}{2}m(0.294\omega)^2+\frac{1}{2}I_G\omega^2 \Rightarrow 68\cdot 9.8\cdot 0.01=\frac{1}{2}68(0.294\omega)^2+\frac{1}{2}3.23\omega^2$$

De la resolución de esta ecuación se obtiene:

$\underline{\omega=1.22\ rad/s}$



c) Aislamos el sistema en esta posición, tal como se muestra en la figura. Si tomamos momentos respecto del punto G tendremos:

$$\Sigma M_G=I_G\alpha \Rightarrow F_rR=I_G\alpha$$

Si la velocidad angular es máxima, su derivada será igual a cero luego:

$$\frac{d\omega}{dt}=\alpha=0$$

Sustituyendo en la ecuación de momentos:

$$F_rR=I_G\alpha \Rightarrow F_rR=0$$

De donde obtenemos que dado que el radio R no es cero:

$$\underline{F_r=0}$$