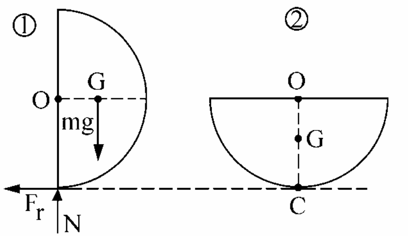
Como no existe deslizamiento la única fuerza que realiza trabajo es el peso. Como es una fuerza conservativa, se conserva la energía mecánica.

La energía cinética es máxima cuando el centro de gravedad G ocupa la posición mas baja. Tomaré entonces dos situaciones, la 1 cuando se suelta el sistema, y la 2 cuando el centro de masa esté en la posición más baja.



Lo primero que haremos es determinar el centro de gravedad G. Aplicando uno de los teoremas de Guldin tenemos:

$$V = 2\pi A x_G \Rightarrow \frac{4}{3}\pi r^3 = 2\pi \cdot \frac{1}{2}\pi r^2 OG \Rightarrow OG = \frac{4r}{3\pi}$$

La energía total se conserva:

$$E_1 = E_2$$

$$E_1 = mgh_1$$

ya que parte del reposo.

$$E_2 = mgh_2 + \frac{1}{2}mv_G^2 + \frac{1}{2}I_G\omega^2$$

Como C es el centro instantáneo de rotación:

$$v_G = \omega CG = \omega\left(r - \frac{4r}{3\pi}\right)$$

$$I_G = I_O - mOG^2 = \frac{1}{2}mr^2 - m\left(\frac{4r}{3\pi}\right)^2$$

La energía total se conserva:

$$E_1 = E_2 \Rightarrow mgh_1 = mgh_2 + \frac{1}{2}mv_G^2 + \frac{1}{2}I_G\omega^2$$

$$mg(h_1 - h_2) = \frac{1}{2}m\omega^2\left(r - \frac{4r}{3\pi}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}mr^2 - m\frac{16r^2}{9\pi^2}\right)$$

La diferencia de alturas vale:

$$h_1 - h_2 = OG = \frac{4r}{3\pi}$$

Sustituyendo todo:

$$mg(h_1 - h_2) = \frac{1}{2}m\omega^2\left(r - \frac{4r}{3\pi}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}mr^2 - m\frac{16r^2}{9\pi^2}\right) \Rightarrow g\frac{4r}{3\pi} = \frac{1}{2}\omega^2\left(r^2 + \frac{16r^2}{9\pi^2} - \frac{8r^2}{3\pi} + \frac{1}{2}r^2 - \frac{16r^2}{9\pi^2}\right)$$

$$g\frac{4r}{3\pi} = \omega^2\left(\frac{3}{4}r^2 - \frac{4r^2}{3\pi}\right) \Rightarrow \omega^2 = \frac{g\frac{4}{3\pi}}{\frac{3}{4}r - \frac{4r}{3\pi}} = \frac{g\frac{4}{3\pi}}{\frac{9r\pi - 16r}{12\pi}} = \frac{48g\pi}{3\pi(9r\pi - 16r)} = \frac{16g}{9r\pi - 16r} = \frac{16g}{r(9\pi - 16)}$$

$$\underline{\omega = 4\sqrt{\frac{g}{r(9\pi - 16)}}}$$