a) No nos dicen si la rueda desliza o no, de modo que supondremos una cosa y posteriormente la comprobaremos. Suponnemos que la rueda no desliza, con lo cual la fuerza de rozamiento tiene que ser inferior a su valor máximo:

$$F_r \leq (F_r)_{máz} \Rightarrow F_r \leq \mu N$$

Además, si no hay deslizamiento la aceleración del centro geométrico del disco será:

$$a_C = \alpha R = 0.3\alpha$$

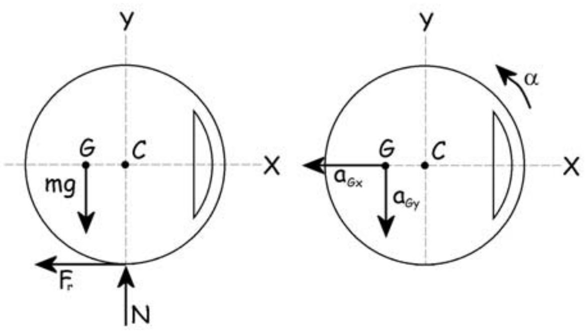
Vectorialmente tendrá la dirección del eje X (puesto que es un punto cuyo movimiento es rectilíneo) y hacia la izquierda, ya que la velocidad angular de la rueda tiene que disminuir puesto que el centro de masas de la rueda asciende (aumenta la energía potencial gravitatoria luego disminuye la cinética). Por tanto:

$$\mathbf{a_C} = -0.3\alpha\mathbf{i}$$

Con estas premisas, que posteriormente comprobaremos, comenzamos a resolver el problema. Tendremos que hacer en primer lugar el diagrama de sólido libre (fuerzas y aceleraciones). En cuanto a aceleraciones, tenemos que determinar la aceleración del centro de masas del disco, que en este caso no coincide con su centro geométrico. Así pues podemos relacionarlos a través de la ecuación:

$$\mathbf{a_G} = \mathbf{a_C} + \alpha \times \mathbf{CG} - \omega^2 \mathbf{CG} = -0.3\alpha\mathbf{i} + \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 0 & \alpha \\ -0.1 & 0 & 0 \end{vmatrix} - 8^2(-0.1\mathbf{i}) =$$

$$= -0.3\alpha\mathbf{i} - 0.1\alpha\mathbf{j} + 6.4\mathbf{i} = -(0.3\alpha - 6.4)\mathbf{i} - 0.1\alpha\mathbf{j}$$



En cuanto a fuerzas, tendremos el peso en el centro de masas, y las reacciones del suelo, que serán la normal y la fuerza de rozamiento. La fuerza de rozamiento tiene que ir hacia la izquierda, ya que hemos dicho que el movimiento es decelerado, de modo que la aceleración tiene sentido contrario a la velocidad (hacia la izquierda). Aplicamos a continuación la segunda ley de Newton:

$$\Sigma F_x = ma_{Gx} \Rightarrow -F_r = -ma_{Gx} \Rightarrow F_r = m(0.3\alpha - 6.4) = 5(0.3\alpha - 6.4) = 1.5\alpha - 32$$
$$\Sigma F_y = ma_{Gy} \Rightarrow N - mg = -ma_{Gy} \Rightarrow N = mg - ma_{Gy} = 5 \cdot 9.8 - 5 \cdot 0.1\alpha = 49 - 0.5\alpha$$

Por último la ecuación de la rotación es:

$$\Sigma M_G = I_G\alpha \Rightarrow Nr - F_rR = I_G\alpha$$

Sustituimos la normal y la fuerza de rozamiento por las expresiones que hemos obtenido para ellas en las ecuaciones de fuerzas:

$$Nr - F_rR = I_G\alpha \Rightarrow (49 - 0.5\alpha)0.1 - (1.5\alpha - 32)0.3 = 0.1125\alpha$$
$$4.9 - 0.05\alpha - 0.45\alpha + 9.6 = 0.1125\alpha \Rightarrow \alpha = 23.67 \text{ rad/s}^2$$

Comprobamos a continuación que efectivamente el cuerpo rueda sin deslizar. Los valores de la fuerza de rozamiento y la normal son:

$$F_r=1.5\alpha-32=1.5 \cdot 23.67-32=3.51 \text{ N}$$
$$N=49-0.5\alpha=49-0.5 \cdot 23.67=37.16 \text{ N}$$

Si el sistema rueda sin deslizar debe verificarse que:

$$F_r \leq \mu N \Rightarrow 3.51 \leq 0.15 \cdot 37.16 \Rightarrow 3.51 \leq 5.57$$

La suposición que hemos hecho es correcta, de modo que la aceleración angular vale:

$$\underline{\alpha=23.67 \text{ rad/s}^2}$$

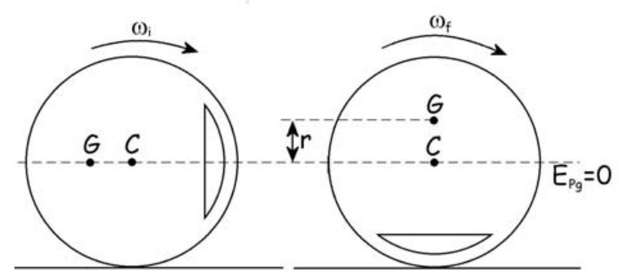
b) La reacción del suelo está formada por la fuerza de rozamiento y la normal, luego es un vector:

$$\mathbf{R}=-F_r\mathbf{i}+N\mathbf{j}=-3.51\mathbf{i}+37.16\mathbf{j}$$

En módulo:

$$R=\sqrt{F_r^2+N^2}=\sqrt{3.51^2+37.16^2}=37.33 \text{ N}$$

$$\underline{R=37.33 \text{ N}}$$



c) Como el rozamiento a la rodadura no disipa energía y la normal es perpendicular al desplazamiento (por tanto no realiza trabajo), la energía mecánica del sistema debe conservarse. Eso implica que la suma de las energías potencial y cinética debe ser constante. Por tanto, la velocidad será mínima cuando la energía cinética sea mínima, es decir, cuando la potencial gravitatoria sea máxima. Esto sucederá cuando el centro de masas del sistema pase por su posición más alta. Por tanto aplicamos la conservación de la energía mecánica entre la posición inicial, cuando la velocidad angular es de 8 rad/s, y la posición final, cuando el centro de masas está en la posición más alta y la velocidad angular es ω_f. Tendremos pues:

$$E_{Mi}=E_{Mf} \Rightarrow E_{CRi}+E_{CTi}=E_{CRf}+E_{CTf}+E_{Pgf} \Rightarrow \frac{1}{2}I_G\omega_i^2+\frac{1}{2}mv_{Gi}^2=\frac{1}{2}I_G\omega_f^2+\frac{1}{2}mv_{Gf}^2+mgr$$

Tenemos que relacionar la velocidad del centro de masas con la velocidad angular. En la posición inicial tendremos:

$$\mathbf{v}_{Gi}=\mathbf{v}_{Ci}+\omega_i\times\mathbf{CG}=\omega_i R\mathbf{i}+\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ 0 & 0 & -\omega_i\\ -r & 0 & 0\end{vmatrix}=\omega_i R\mathbf{i}+\omega_i r\mathbf{j}=8\cdot 0.3\mathbf{i}+8\cdot 0.1\mathbf{j}=2.4\mathbf{i}+0.8\mathbf{j}$$

El módulo al cuadrado será:

$$v_{Gi}^2=2.4^2+0.8^2=6.4 \text{ m}^2/\text{s}^2$$

En la posición final, haciendo de modo análogo:

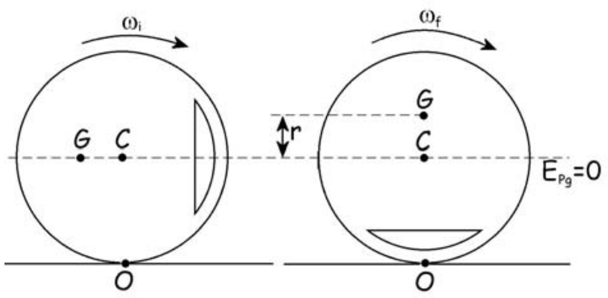
$$\mathbf{v_{Gf}} = \mathbf{v_{Cf}} + \omega_f \times \mathbf{CG} = \omega_f R\mathbf{i} + \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 0 & -\omega_f \\ 0 & r & 0 \end{vmatrix} = \omega_f R\mathbf{i} + \omega_f r\mathbf{i} = \omega_f (R + r)\mathbf{i} = \omega_f (0.3 + 0.1)\mathbf{i} = 0.4\omega_f \mathbf{i}$$

Sustituyendo en la ecuación de la energía:

$$\frac{1}{2} I_G \omega_i^2 + \frac{1}{2} m v_{Gi}^2 = \frac{1}{2} I_G \omega_f^2 + \frac{1}{2} m v_{Gf}^2 + mgr$$

$$\frac{1}{2} 0.1125 \cdot 8^2 + \frac{1}{2} 5 \cdot 6.4 = \frac{1}{2} 0.1125\omega_f^2 + \frac{1}{2} 5(0.4\omega_f)^2 + 5 \cdot 9.8 \cdot 0.1 \Rightarrow 14.7 = 0.45625\omega_f^2$$

$\underline{\omega_f = 5.68 \text{ rad/s}}$



Llegamos a la misma solución si tomamos el movimiento de la rueda como una rotación pura en torno al centro instantáneo de rotación, que denominaremos O. En este caso tendríamos que inicialmente:

$$E_{MT} = E_{Ci} = \frac{1}{2} I_O \omega_i^2$$

ya que con respecto al eje instantáneo de rotación, O, el movimiento es una rotación pura. El momento de inercia respecto de O, aplicando el teorema de Steiner, valdrá:

$$I_O = I_G + mOG^2 = I_G + m(R^2 + r^2) = 0.1125 + 5(0.3^2 + 0.1^2) = 0.6125 \text{ kgm}^2$$

Cuando G está en la posición más alta:

$$E_{MT} = E_{Cf} + E_{Pf} = \frac{1}{2} I'_O \omega_f^2 + mgr$$

Igual que antes, por el teorema de Steiner:

$$I'_O = I_G + mOG'^2 = I_G + m(R+r)^2 = 0.1125 + 5 \cdot (0.3+0.1)^2 = 0.9125 \text{ kgm}^2$$

Sustituyendo:

$$E_{MT} = \text{cte} \Rightarrow \frac{1}{2} I_O \omega_i^2 = \frac{1}{2} I'_O \omega_f^2 + mgr \Rightarrow \frac{1}{2} 0.6125 \cdot 8^2 = \frac{1}{2} 0.9125\omega_f^2 + 5 \cdot 9.8 \cdot 0.1$$

$\omega_f = 5.68$ rad/s

O también podríamos haber llegado a la ecuación anterior por:

$$W = \Delta E_C \Rightarrow mgr\cos 180º = E_{C\,final} - E_{C\,inicial} \Rightarrow -mgr = \frac{1}{2} I'_O \omega_f^2 - \frac{1}{2} I_O \omega_i^2$$

Puede verse que esta ecuación es la misma que tenemos anteriormente.